*

# Undersøkelser i intensjonal logikk

Et bidrag til modellteorien for ikke-klassiske og klassiske intensjonale predikatlogikker.

*

Morten Rognes

1973

*

Magistergradsavhandling
Universitetet i Oslo
1973

**INNHOLD**

*Forord*....*1*

*Kapittel 0*....*3*

Innledning....4

*Kapittel I*....*9*

§1 Definisjon av "intensjonalt språk i vid forstand". Vokabularet til slike språk....10

§1.1 Induktiv definisjon av termer og formler i intensjonale språk i vid forstand....11

§1.2 Notasjon for substitusjon av termer og formler. Forkortelser....12

§1.2.1 Definisjon av "logisk symbol" og "logisk vokabular"....13

§1.3 Definisjon av "intensjonalt språk i snever betydning" – "J:0-språk"....13

§1.4 Definisjon av en relasjon mellom språk: "L:2 er et språk for L:1". Definisjon av uttrykket "L-morfi"....13

§2 Kommentarer til de språktypene som er introdusert. Forklaringer og motivasjon. Eksempler....14

*Kapittel II*....*21*

§1 Definisjon av I:0-modellstruktur for et I:0-språk L. Definisjon av J:0-modellstruktur for et J:0-språk L....22

§2 Navn....23

§3.1 Definisjon av I:0-modell....23

§3.2 Definisjon av J:0-modeller....24

§4 Definisjoner av en del viktige semantiske begreper....26

§5 Notasjon i forbindelse med modellene....26

§6 Om innholdet i resten av kapitlet....27

§7 Normale I:0-modeller. Intensjoner. Uformell forklaring av de enkelte komponentene i en modell. Seminormale I:0-modeller. Gyldige formler....28

§8 Kommentarer til de forskjellige kategorier av uttrykk i intensjonale språk. Konstanter, funksjonssymboler, singulære termer, beskrivelser. Gyldige formler....31

§9 Strenge og svake intensjonale operatorer....36

§10 Kvantifikasjon inn i intensjonale kontekster....37

§11 Krav som kan pålegges modellene....38

*Kapittel III*....*40*

§1 Definisjon av de aksiomatiske systemene I:0 og J:0. Introduksjon av en rekke syntaktiske begreper....41

§2 En rekke viktige hjelpesetninger. Bevis for at alle teoremene i I:0 og J:0 er gyldige.

.....43
§3 Hjelpesetninger og viktige metateoremer.....45
*Kapittel IV*.....*48*
§1 Bevis for at systemet J:0 er fullstendig.....49
§2 Bevis for at systemet I:0 er fullstendig.....53
§3 Kompakthet. Supplerende bemerkninger.....59
*Kapittel V*.....*63*
§1 Normale syntaktiske operasjoner.....64
§2 Indeks-systemer og systemkarakteristikker.....66
§3 Avgrensning av de aksiomene som er bestemt av en systemkarakteristikk.....67
§4 Definisjon av systemene I:0[Ç] og J:0[Ç].....68
§5 Avgrensning av spesielle klasser av modeller. Tillatte system-karakteristikker.....69
§6 Et generelt fullstendighetsteorem for systemer av typen J:0[Ç].....71
§7 Et generelt fullstendighetsteorem for systemer av typen I:0[Ç].....77
§8 Avsluttende bemerkninger.....79
*Kapittel VI*.....*81*
§1 Om muligheten av å gi en adekvat definisjon av logisk sannhet for intensjonale språk. .....82
§2 Logisk sannhet i J:0-språk som bare inneholder operatoren "– tror at –". Diskusjon. .....83
§3 Logisk sannhet i J:0-språk som bare inneholder operatoren "– vet at –". Diskusjon..87
§4 Diskusjon av logisk sannhet for språk med flere intensjonale operatorer.....88
§5 Introduksjon av spesielle predikater. Problemene om logisk sannhet sett i lys av de nye predikatene.....90
§6 Et eksempel på en kalkyle.....91
*Kapittel VII*.....*94*
§1 Spesielle predikater. Logikk-karakteristikker. L-systemer.....95
§2 Spesielle aksiomklasser.....96
§3 Systemene I:0[∑,Ç] og J:0[∑,Ç].....97
§4 Et generelt fullstendighetsteorem for kalkylen J:0[∑,Ç].....98
§5 Et generelt fullstendighetsteorem for kalkylen I:0[∑,Ç].....100
*Kapittel VIII*.....*103*
§0 Innledende bemerkninger.....104
§1 Standardmodeller. Ekspanderbare og konstruerebare systemkarakteristikker. J:0-modeller av første og andre slag.....104
§2. Lemma om forholdet mellom de to typene av modeller.....107

§3 Isomorfi mellom modeller....108
§4 Δ-ekstensjon, Δ-substruktur, elementær substruktur, elementær ekstensjon....110
§5 Elementære kjeder og unionen av en elementær kjede. Tarski's lemma....112
§6 En viktig hjelpesetning....117
§7 Joint-Consistency-teoremet og Craigs interpolasjonsteorem....118
§8 Et svakere konstruerbarhetskrav. Kriterium for Joint-Consistency og interpolationsteoremet....121
§9 Regulære systemkarakteristikker og ekspanderbarhet....123
§10 Craigs interpolasjonsteorem for spesielle logikker....128
§11 Aksiomatisering av kalkylene introdusert i §10. Avsluttende bemerkninger....136
*Kapittel IX*....*140*
§1 Avsluttende bemerkninger....141
*Referanser*....*144*
Referanser....145

# Forord

## Forord

Selv om det foreliggende arbeid er teknisk preget anser jeg det for å være av filosofisk natur. Grunnen til dette er at intensjonale språk av den typen jeg har studert først og fremst har relevans for en rekke filosofiske problemer, f.eks. spørsmålet om intensjonaliteten ved mentale akter, spørsmål om essensialisme, og spørsmålet om reduksjon av intensjonale språk til ekstensjonale språk. Videre er det vanskelig å fri seg fra inntrykket av at man mer eller mindre er tvunget til å betrakte slike språk når man skal foreta en en dypere analyse av slike begreper som tro og viten, begreper som har sammenheng med iaktagelse, erindring og følelser, og meget annet.

Det bør bemerkes at den semantiske teorien som er utviklet her, såvidt jeg kan se, er helt ny. Jeg håper at mine resultater viser at den er verdt å ta i betraktning og at det kan dreie seg om en fruktbar teori. Jeg har hatt den innstillingen at modellteori kan bidra til en klarere innsikt i spørsmål som har med intensjonale språk å gjøre. På den annen side tror jeg at en rekke problemer selvfølgelig ikke kan løses ved rent modell-teoretiske eller formelle betraktninger alene. Dette gjelder f.eks. spørsmålet om det er mulig å rettferdiggjøre den form for essensialisme som kvantifikasjon inn i intensjonale kontekster synes å innebære. Dessuten gjelder dette en del spørsmål som har å gjøre med den vitenskapelige status til endel av de konstruksjoner som inngår i intensjonale språk og som skiller dem fra rent ekstensjonale språk. Imidlertid følger jeg meg overbevist om at større klarhet på dette felt bare vil kunne oppnås ved forsøk på å klargjøre logikken til de relevante konstruksjoner i den utstrekning dette er mulig og at semantiske teorier er nødvendige for å kunne nå dette mål.

Morten Rognes

# Kapittel 0

## Innledning

Selv om modallogikken i de senere år kan sies å ha gjort adskillige fremskritt takket være de semantiske teoriene som har blitt fremlagt av Kanger, Kripke, Hintikka, Scott, Montague og mange andre[1] er det likevel en del mangler som man kunne feste seg ved:

(1) For det første kunne man hevde at et noe begrenset repertoar av intensjonale operatorer[2] har blitt studert. Inntil nå har modaliteter som formelt sett er beslektet med de logiske modalitetene, slike som kausal nødvendighet , historisk nødvendighet, og en rekke deontiske modaliteter i det store og hele vært i fokus for interessen. Men det forekommer meg som om dette ikke er de eneste modalitetene man kan studere ved hjelp av formelle metoder. I modallogikken burde man også studere nøyere logikken til slike uttrykk som f.eks. "x tror at – " , "x vet at –", og mer generelt alle de intensjonale operatorene som vagt kan avgrenses ved å si at de uttrykker "propositional attitudes".[3] Disse omfatter ikke bare de to

---

[1] De grunnleggende arbeidene er Kanger [1], Hintikka [3], [4], [7[, Kripke [1], [2], [3]. Senere meget verdifulle bidrag er kommet fra Scott og Montague. Se Scott [1] og Montague [2], [3]. Semantikken utviklet i disse arbeidene er det som vanligvis går under navnet "Kripke-semantikk". Kripke-semantikken har også blitt brukt i studiet av intuisjonistisk logikk, men dette er et tema som vi ikke skal ta opp her. Et omfattende arbeid har blitt nedlagt i modal utsagnslogikk. Leseren henvises til Lemmon & Scott [1] og Segerberg [1]. I disse arbeidene er Kripke-semantikk benyttet. Modallogiske systemer har ogå blitt studert fra en algebraisk synsvinkel. I denne forbindelse kan man konsultere Lemmon [1], [2].

[2] La L være et formalt språk. Vi antar at L har et vokubular som inneholder bestemte tegn. Vokabularet kan være nedelig eller uendelig. Vi antar at alle tegnene i vokabularet er uttrykk i L og at alle nedelige sekvenser av uttrykk i L også er uttrykk i L. Exp(L) står for klassen av uttrykk i L. For ethvert språk L antar vi at Exp(L) inneholder minst tre ikke-tomme uttrykksmengder, nemlig klassen av variabeltegn i L, Var(L), mengden av termer i L, Term(L) og mengden av formler i L, Form(L). Men operator i L forstår vi et uttrykk u i vokabularet til L som ikke er noe variabeltegn, term eller formel og som er slik at dersom x;1,...,x;m, t;1,...,t;p,F;1,...F;n er henholdsvis m variabeltegn, p termer og n formler så er u(x;1,...,x;m,t;1,..,t;p,F;1,...,F;n) enten en term eller en formel i L. Vi sier i så fall at u er en operator av grad <m,p,n> i L. Vi krever av en operator at den skal tilfredstille de vanlige kravene til entydig lesbarhet. Det vi kaller operatorer er det som kalles "konstruksjoner" i Føllesdal [1], [2]. Vi sier at en operator er intensjonal om den er ekstensjonalt uigjennomsiktig i den betydning som er definert i Føllesdal [1]. Dette innebærer at en formeldannende operator er intensjonal om det er slik at man ikke kan substituere generelt korefensielle termer eller koekstensjonale formler innenfor området til den uten å risikere at sannhetsverdien endres. Tilsvarende ved termdannende operatorer. En slik kalles for intensjonal om det ikke generelt gjelder at man kan substituere termer med samme referanse ,og formler med samme sannhetsverdi, innenfor området til den uten at referansen til termen som helhet endres.

[3] Med "propositional attitude"-operatorer forstår jeg slike intensjonale operatorer som "x ser at – ", "x hører at –", "x sier at – ", "x forventer at –", "x tenker at – ", "x ønsker at –", "x mener at – ", "x er klar over at –". Kort sagt det man av og til kaller for "act-contexts". Jeg vil også regne slike intensjonale konstruksjoner som "x sørger for at – ", " forsøker å bringe verden i en slik tilstand at – ", og lignende uttrykk, for "propositional attitude"-operatorer. Det synes vanskelig, nærmest umulig, å gi en presis definisjon av denne klassen av konstruksjoner. Det er heller ikke særlig viktig for våre formål. Det er nærliggende å fremheve to trekk ved disse operatorene: (i) De inneholder minst en variabel som kan ta personer som verdier. (ii) Er T;<m,n> en slik operator er det urimelig å tro at det holder generelt at "T;<m,n>(x;1,...,X;n,F) –> T;<m,n>(t;1,...,t;n,G)" er logisk gyldig om
"F–>G" er en instans av et gyldig kvantifikasjonsteoretisk skjema. Det er selvfølgelig ikke nødvendig at en "propositional attitude"-operator skal være en formeldannende operator på bare en term og en formel. Det kan godt dreie seg om en formeldannende operator på to termer ogen formel. Et eksempel på dette vil være konstruksjonen: "x sier til y at –". Jeg har funnet uttrykket "propositional attitude" uoversettelig og har derfor ikke funnet noen bedre utvei enn å bruke det uten å oversette. Det bør kanskje nevnes at min bruk av "propositional attitude" ikke innebærer at jeg tilslutter meg noen teori som impliserer eksistensen av mentale akter, eller for eksempel innebærer at propositional attitudes-operratorene i en eller annen forstand "refererer til" bestemte mentale akter. De teoriene vi skal undersøke i det følgende tror jeg er nøytrale med hensyn på

operatorene som vi nevnte ovenfor, men et ubestemt antall andre operatorer som eksempelvis "x ser at – ", "x hører at – ", "x merker at –", "x undres om det er slik at – ", "x er i tvil om det er slik at –", "x har et meget vagt inntrykk av at –", for bare å nevne noen få og nokså vilkårlig valgte uttrykk. Disse og andre konstruksjoner forekommer så ofte i vanlig tale, og de synes å være av en slik fundamental betydning for erkjennelsesteorien, bevissthetens filosofi og psykologien, at et forsøk på å avklare deres formelle logiske egenskaper i høyeste grad må anses som viktig.

(2) Man har i for stor grad viet sin interesse til modal utsagnslogikk. I seg selv er ikke dette noen "feil", men det virker nokså klart at dersom modal-logikken ikke bare skal bedrives som l'art pour l'art, men brukes til å oppnå større klarhet om de logiske egenskapene til de operatorene jeg har nevnt ovenfor, så må man utover den begrensede utsagnslogiske rammen. Man må følgelig studere språk der man kombinerer intensjonale operatorer med kvantorer og identitet på en slik måte at man tillater kvantifikasjon inn i intensjonale kontekster. Det forekommer meg også nødvendig at man tillater singulære termer i dette språket, videre en bekrivelsesoperator slik at man kan danne bestemte beskrivelser og endelig funksjonssymboler. De problemene som oppstår når man vil formulere en tilfredsstillende teori for disse kategoriene av uttrykk når intensjonale operatorer er med i språket er viktige.

(3) De forsøk som hittil har blitt gjort på å tolke intensjonale språk har alle gått ut på å innføre et område av mulige verdener som man tenker seg ordnet ved hjelp av en eller flere alternativrelasjoner og hvor man forestiller seg assosiert med hver verden et område av mulige individer som representerer de individene som eksisterer i verdenen. Selv om den rent formelle teorien man får på denne måten ikke forutsetter eksistensen av mulige verdener, men snarere kan betraktes som en abstrakt, "algebraisk", teori, er det likevel vanskelig å fri seg fra det inntrykk at man må gå med på eksistensen av mulige verdener om man virkelig tar teorien alvorlig. Det forkommer meg imidlertid som om antagelsen om at det finnes mulige verdener er dypt metafysisk og at man derfor burde søke etter en intepretasjon av de intensjonale operatorene som ikke forplikter en til å gå med på eksistensen av mulige verdener eller mulige individer. Dette synes å være et svært viktig, men også meget vanskelig problem.

(4) Vi nevnte ovenfor at man burde studere slike intensjonale operatorer som f.eks. "x vet at – ", "x tror at –" og en rekke andre. Inntil nå har imidlertid problemet om begrenset om begrenset substitusjon av logiske ekvivalente uttrykk innenfor området til slike intensjonale operatorer bare blitt meget sparsomt belyst fra en semantisk synsvinkel.[4] I den utstrekning man har forsøkt å behandle dette problemet har man vanligvis tydd til den utvei å reintepretere de metalogiske begrepene "gyldighet" og "konsistens", siden man da kan beholde den modallogiske rammen. Imidlertid virker det klart at man ikke i det lange løp kan se seg tilfreds med en slik løsning, og at det burde finnes brukbare alternativer til denne fremgangsmåten. På mange måter anser vi dette som et fundamentalt problem siden det dukker opp ved nesten alle de intensjonale operatorene som kan sies å uttrykke "propositional attitudes", f. eks. konstruksjoner som "x vet at – ", "x ser at –", "x ønsker at –". Selv om en person ønsker at F er tilfelle behøver det ikke nødvendigvis å være slik at vedkom-mende ønsker at G er tilfelle der G representerer en setning som er en logisk konsekvens av F. Jeg

forskjellige metalistiske standpunkter av denne art.

4 De eneste alvorlige forsøkene på å ta opp dette problemet synes å være gjort av Cresswell og Montague. Se Cresswell [1], [2] og Montague [3]. Den semantikken vi skal benytte i dette arbeidet er pesielt utformet for dette formål, men vår metode er ikke identisk med den i de nevnte artikler. Semantikken i disse arbeidene er en generalisering av de vanlige Kripke-modellene, mens vår semantikk ikke kan sies å være det.

tror man ikke kan sies å ha noen dyp forståelse av de såkalte "propositional attitudes" om man ikke kan si noe tilfredsstillende om hvordan dette problemet kan takles.

Så langt har jeg antydet en del mangler og problemer i studiet av intensjonal logikk slik det forkommer meg at situasjonen er på det nåværende stadium. Skulle man nå møte de utfordringene som ligger i dette ville det være naturlig å beskrive et omfangsrikt intensjonalt språk som inneholdt blandt annet alle de intensjonale operatorene som jeg har nevnt samt kvantorer, identitet, beskrivelsesoperator og funksjonssymboler. Videre burde vi beskrive en generell semantikk for dette språket slik at man kunne definere "logisk sannhet" og "logisk konsekvens" på en eksakt måte. Videre burde man vise hvordan pro-blemene nevnt under (4) kunne løses. Faktisk er det dette projekt med alle sine komplikasjoner som vi har forsøkt å gjennomføre i denne avhandlingen. På dette punkt kan det derfor være passende å gi en oversikt over strukturen og innholdet i dette arbeidet.

I Kapittel I innfører vi to typer av språk, intensjonale språk i vid forstand, I;0-språk, og intensjonale språk i snever forstand, J;0-språk. Et J;0-språk er et første-ordens språk med konstanter og funksjonssymboler utvidet med beskrivelsesoperator, en spesiell kategori med singulære termer – som vi kaller singulære termer i snever forstand – samt en rekke intensjonale operatorer av formen T;<m,n>. Er t;1,...,t;m m termer i språket og er F en formel så er
T;<m,n>(x;1,...,x;m,F) en formel. T;<m,n> er altså for hvert naturlig tall n en formeldannende konstruksjon som til enhver sekvens av m termer og en formel gir som resultatet en formel. Det naturlige tallet m angir altså antallet termer operatoren T;<m,n> virker på, n angir nummeret til den. Vi har indeksert de intensjonale operatorene i et J;0-språk en-entydig på NXN der N er mengden av de naturlige tallene. Det er imidlertid ingenting i veien for at vi kunne ha brukt en annen indeksmengde f.eks.. h;1Xh;2 Inkl NXN der h;1 og h;2 er visse endelige mengder av naturlige tall. Et I;0-språk er et J;0-språk der vi har føyd til de følgende logiske symboler:

(a) En operator μ som føyd til en formel F gir oss en term μ(F). Uttrykket "μ(F)" kan leses "utsagnet at F", eller "det utsagnet som sier at F er tilfelle". Vi har i mangel av et bedre navn valgt å kalle denne operatoren for en "utsagnsabstraksjonsoperator".

(b) Et predikat U og en rekke predikater t;<m,n> der hvert predikat t;<m,n> svarer til den intensjonale operatoren T;<m,n>. De diverse predikatene t;<m,n> er indeksert en-entydig på den samme indeksmengden som de intensjonale operatorene T;<m,n>. Alle disse predikatene regner vi som logiske symboler i språket og har nøyaktig samme status som identitetstegnet "=". Motivet for å innføre disse predikatene blir forklart nøyere i Kapittel I.

Vi har ikke spesifisert nøyaktig hvilke intensjonale operatorer vi skal ha med i et J;0-språk eller et I;0-språk. Men det er ingenting i veien for at man i et slikt språk f.eks. kan la T;<0,0> være "Det er logisk nødvendig at – ", videre at T;<0,1> representerer "Det er obligatorisk at –", T;<1,0> representerer "x ser at –", T;<1,1> representerer konstruksjonen "x vet at – ", osv. Denne åpenheten ved våre språk er tilsiktet fordi vi har ønsket å legge frem en generell teori og derfor ikke har villet binde oss til å studere et helt bestemt sett med intensjonale operatorer.

I Kapittel II beskriver vi vår semantikk for språkene definert i Kapittel I. For hvert J;0-språk L definerer vi hva som menes med en J;0-modell R for L. Tilsvarende definerer vi for hvert I;0-språk L hva som menes med en I;0-modell for L. I hver modell R har vi innført et apparat som gjør oss i stand til å tolke de intensjonale operatorene i språket. Det bør bemerkes at den semantiske teorien som innføres er svært generell og at den kan oppfattes som en generalisering av den vanlige semantikken for modallogikk. Vi definerer så de vanlige

seman-tiske begrepene for hver type av modeller, dvs. vi definerer hva som menes med at en formel F er sann i en J;0-modell R, hva som menes med at en formel i et J;0-språk L er gyldig, hva som menes med at en J;0-modell R er en modell for en mengde med formler Δ osv. I de avsluttende avsnitt i dette kapitlet gir vi så en mer uformell redegjørelse for modellene og kommenterer en rekke viktige trekk ved dem. Vi kommenterer spesielt vår tolkning av formler som inneholder kvantifikasjon inn i intensjonale kontekster, videre hvilke lover som er gyldige for konstantene, de singulære termene i snever forstand, beskrivelsestermene og funksjonssymbolene.

Vår semantikk utfyller de "manglene" som ble nevnt under punkt (1) – (4) ovenfor. For det første er det en semantikk som er tilpasset språk med flere intensjonale operatorer, f.eks. "x vet at – ", "x tror at –", "x ser at – ", "Det er nødvendig at – " etc. For det andre har vi fremlagt en måte å behandle singulære termer og funksjonssymboler på innenfor rammen av intensjonale språk. For det tredje har vi ikke behøvd å benytte oss av idéen om mulige verdener for å kunne tolke de intensjonale operatorene. For det fjerde er teorien spesielt konstruert for å kaste lys over problemene i forbindelse med begrenset substitusjon av logisk ekvivalente uttrykk i intensjonale kontekster.

I Kapittel III innfører vi en rekke syntaktiske begreper. Vi definerer først to minimalkalkyler J;0 og I;0. Dernest beviser vi at de to systemene er "sunne" i den forstand at ethvert I;0-teorem i et I;0-språk L er gyldig i enhver I;0-modell R for L og at ethvert J;0-teorem i et J;0-språk L er gyldig i enhver J;0-modell R for L. Resten av kapitlet er viet til formuleringen og beviset for en rekke hjelpesetninger som er nødvendige for å kunne gjennomføre et fullstendig bevis for at de to minimalsystemene er komplette. Fullstendighetsbevisene blir så detaljert fremlagt i Kapittel IV. Bevisene er såkalte Henkin-bevis.

I Kapittel V studerer vi utvidelser av minimalsystemene I;0 og J;0. For dette formål innfører vi begrepet "syntaktisk operasjon over klassen av I;0-språk" og det helt analoge begrepet "syntaktisk operasjon over klassen av J;0-språk". Vi definerer så hva som menes med at en syntaktisk operasjon er regulær, substitusjonsinvariant og korrekt. En normal syntaktisk operasjon er en som har alle disse tre egenskapene. Ved hjelp av begrepet normal syntaktisk operasjon kan vi så definere hva som menes med et indekssystem og en systemkarakteristikk Ç over henholdsvis klassen av I;0-språk og klassen av J;0-språk. Er så Ç en systemkarakteristikk over klassen av I;0-språk, definerer vi en kalkyle I;0[Ç] som er bestemt av denne karakteristikk Ç. På tilsvarende måte om Ç er en systemkarakteristikk over klassen av J;0-språk. Gitt en slik karakteristikk Ç defineres en kalkyle J;0[Ç] som er entydig bestemt av karakteristikken. Vi definerer også for hver systemkarakteristikk Ç over klassen av J;0-språk, og ethvert J;0-språk L, en klasse med J;0-modeller for L som tilfredsstiller karakteristikken Ç. Denne mengden med J;0-modeller betegnes med "Mod;(J;0)(Ç,L)". På tilsvarende måte definerer vi for hver systemkarakteristikk Ç over klassen av I;0-språk, og ethvert I;0-språk L, en klasse med I;0-modeller for L som tilfredsstiller karakteristikken Ç. Denne mengden med I;0-modeller betegnes med "Sem;(I;0)(Ç,L)". Vi beviser så to meget generelle kompletthetsteoremer. Det første av disse sier at dersom Ç er en systemkarakteristikk over klassen av J;0-språk og Ç har en bestemt egenskap – nemlig egenskapen å være tillatt – og L er et J;0 språk så er FêTh(J;0[Ç], L) hvis og bare hvis F er gyldig i enhver modell R som er med i Mod;(J;0)(Ç,L). Her betegner uttrykket "Th(J;0[Ç], L)" klassen av alle J;0[Ç]-teoremer i L.

Det andre teoremet er helt analogt og sier at dersom Ç er en tillatt systemkarakteristikk over klassen av I;0-språk, og L er et I;0 språk, så er FêTh(I;0[Ç], L) hvis og bare hvis F er gyldig i enhver modell R som er med i Mod;(I;0)(Ç,L).

Disse to fullstendighetsteoremene er blandt våre viktigste resultater. Det bør nevnes at

de er meget generelle og gir som spesialtilfelle fullstendighets-teoremer for en rekke modalkalkyler som er beskrevet før, f.eks. det minste "klassiske" systemet E, samt kalkylene E, E2, E3, C2, C3, K, K4, D, T og S4.

I Kapittel VI diskuterer vi nøyere spørsmålet om logisk sannhet for de språkene vi har tatt i betraktning; spesielt med hensyn på språk som bare inneholder "propositional attitude"-operatorer. Vi diskuterer problemet hovedsakelig i forbindelse med operatorene "x tror at – " og "x vet at – ". Betraktet isolert konkluderer vi med at det er få logiske lover som gjelder for dem. Imidlertid kan vi ved å innføre visse nye predikater som får en konstant tolkning i alle modeller, konstruere mer interessante logikker. Metoden vi benytter oss av på dette punkt synes å være svært generell og kan tilsynelatende anvendes ved alle "propositional attitude"-operatorene vi har tatt i betraktning. Den synes også å ha en del klare fordeler fremfor tidligere fremgangsmåter. F.eks. behøver vi ikke reintepretere de metalogiske uttrykkene "gyldighet", "konsistens" etc. eller tillegge de intensjonale operatorene noen uvanlig betydning.

I Kapittel VII gir vi så en formell og generell fremstilling av denne metoden. Vi innfører en egen type m-ære predikater $\pi;<m,n>$ $(m\geq 1)$ som vi kaller for "spesielle predikater". Disse predikatene regnes blandt de logiske symbolene. Videre definerer vi hva som menes med en "logikk-karakteristikk" $\sum$ over henholdsvis klassen av J;0-språk og klassen av I;0-språk. Vi definerer også hva som menes med et L-system $[Ç,\sum]$ over språkene i klassen av J;0-språk og språkene i klassen av I;0-språk. Man kan så definere en logikk $J;0[\sum]$ og en logikk $J;0[Ç,\sum]$ for henholdsvis hver logikk-karakteristikk $\sum$ og hvert L-system $[Ç,\sum]$ over klassen av J;0-språk. På tilsvarende måte definerer vi logikker $I;0[\sum]$ og $I;0[Ç,\sum]$ der $\sum$ og $[Ç,\sum]$ er henholdsvis en logikk-karakteristikk og et L-system over klassen av I;0-språk. Vi viser så et meget generelt kompletthetsteorem som gir oss kompletthet for systemene $J;0[\sum]$ og $J;0[Ç,\sum]$ om $\sum$ og $[Ç,\sum]$ er det vi kaller tillatte med hensyn på klassen av J;0-språk. Vi beviser så tilsvarende generelle fullstendighetsteoremer for $I;0[\sum]$ og $I;0[Ç,\sum]$. Resultatene i dette kapitlet kan oppfattes som generaliseringer av resultatene i Kapittel V.

I Kapittel VIII viser vi noen av anvendelsesmulighetene til kompletthets-teoremet for J;0[Ç]. Hovedresultatet er et meget generelt teorem som sier at dersom Ç er en systemkarakteristikk som tilfredsstiller bestemte krav gjelder Craigs interpolasjonsteorem for J;0[Ç] hvis og bare hvis Ç er det vi kaller en "svakt konstruerbar" systemkarakteristikk. Siden det er mulig å påvise at en rekke systemkarakteristikker er svakt konstruerbare er teoremet av interesse. Vi benytter det til å gi bevis for Craigs interpolasjonsteorem for en rekke modal-logikker, blandt annet systemene E, C og K og en familie med relaterte systemer. Et lignende generelt teorem kan formodentlig bevises i forbindelse med kalkyler av typen $J;0[\sum]$ og $J;0[Ç,\sum]$. Resultatene i dette kapitlet viser at også fra en rent teknisk synsvinkel er den modellteorien vi har utviklet av interesse.

Kapittel IX inneholder avsluttende bemerkninger og en oppsummering av det som har blitt oppnådd i denne avhandlingen.

# Kapittel I

Intensjonale språk

## §1 Definisjon av "intensjonalt språk i vid forstand". Vokabularet til slike språk.

Vi definerer de språkene vi skal ta i betraktning. Først defineres hva som i denne avhandlingen vil forstås med et intensjonalt språk i vid forstand. I §1.3 vil vi definere hva som forstås med et intensjonalt språk i snever forstand.

Et intensjonalt språk L i vid forstand har et vokabular som består av uttrykkene i de følgende disjunkte mengder:

(i) *Setningslogiske konnektiver*. Vi skal bare bruke konnektivene "¬" og "–>" med den vanlige lesemåten. "¬" er negasjonstegnet og "–>" tegnet for materiell implikasjon. De andre setningslogiske konnektivene "v", "&" og "<–>" innføres som definerte symboler ved hjelp av de følgende definisjoner:

(1) FvG <–> (¬F) –> G
(2) F&G <–> ¬((¬F)v (¬G))
(3) F <–> G <–> ((F–>G) & (G–>F))

(ii) *Kvantorer og beskrivelsesoperator*. Språket inneholder bare en kvantor, "A" og en beskrivelsesoperator "i". A er allkvantoren og en formel av typen "(Ax)F" leses "For alle x er det lik at F". "i" er den vanlige beskrivelsesoperatoren. En formel av typen "(ix)F" leses "Det objektet x som er slik at F". Eksistenskvan-toren "E" innføres som et definert symbol på følgende vis:

(1) (Ex)F <–> ¬(Ax)¬F

(iii) *Intensjonale operatorer.* Dette er en mengde uttrykk indeksert på NXN der N står for mengden av de naturlige tall. [5] Vi skal anta at 0 er inkludert i N. Vi bruker "T" for å betegne indekseringsfunksjonen og antar at denne er en-entydig. T;<m,n>, der <m,n> er med i NXN, er altså et uttrykk i språket, mer spesifikt en operator som om den anvendes på m termer og en formel gir som resultat en formel. Vi inndeler de intensjonale operatorene i to disjunkte delmengder, *strenge* intensjonale operatorer og *svake* intensjonale operatorer. Vi forutsetter at de strenge intensjonale operatorene er indeksert på en delmengde h av NXN og at de svake intensjonale operatorene har indekser i NXN–h. Vi regner denne indekseringsfunksjonen med til vokabularet i språket. To språk er altså forskjel-lige om de har forskjellig indekseringsfunksjon.

(iv) *En intensjonal utsagnsabstraksjonsoperator μ.* Dette er en termdannende operator som gitt en formel gir som resultat en term i språket. Er F en formel i språket er det hensikten at

[5] Det er selvfølgelig ikke nødvendig å indeksere de intensjonale operatorene på NXN. Dette er et vilkårlig valg. Vi kunne i steden ha indeksert dem en-entydig på en mengde C;1XC;1 der C;1 og C;2 er endelige delmengder av N. Dvs. at vi kunne ha latt indeksmengden ha vært en endelig relasjon R Inkl NXN. Vi kaller operatorer med indeks <m,n> for operatorer av grad m. Et naturlig valg av indeksmengde ville være å velge en endelig R Inkl NXN der vi har, om mêDom(R) =Mg(x: <x,y>êR) så er Mg(n: <m,n>êR) = {0,...,p} for noe naturlig tall p. Valget av R avhenger naturligvis av hvilke konkrete språk man vil studere. Det ka nevnes at alt som vi skal gjøre i det følgende fortsatt vil la seg gjennomføre selvom vi lar indeksmengden være en R av typen ovenfor. Et slikt valg vil bare kreve mindre (og opplagte) forandringer i teksten.

"μ(F)" skal leses "Det at F", "Det forhold at F" eller "Det utsagnet som sier at F".

(v) *En tellbart uendelig mengde med variabeltegn.* Vi lar disse offisielt være tegnene "x", "y", "z", "w", "x'", "y'", "z'" .... . Vi bruker x, y, z, eventuelt påført indekser og apostrofer som syntaktiske variabler for variabeltegn.[6]

(vi) *En mengde med konstanter.* Denne kan være endelig eller uendelig, tellbar eller ikke-tellbar. Vi skal bruke "e", "c", "k", "d", eventuelt med indekser og apostrofer som syntaktiske variabler for tegn av denne kategori.

(vii) *En mengde med singulære termer i snever forstand.* Vi legger ingen restriksjoner på kardinaltallet til denne mengden. Den kan også være tom. Vi skal bruke "a", "b" eventuelt med apostrofer eller indekser som syntaktiske variabler for uttrykk av denne type.

(viii) *n-ære funksjonssymboler for hvert nêN;1 ={1,2,3,4,....}.* Vi bruker "f", "g", "h", eventuelt påført indekser og apostrofer som syntaktiske variabler for uttrykk som tilhører denne kategorien. Det kan bemerkes at vi i ikke legger noen restriksjoner på kardinaltallet til denne typen uttrykk. Heller ikke er det gitt at det i ethvert språk av den typen vi nå er i ferd med å definere finnes n-ære funksjonssymboler for hvert n. Klassen av f.eks. funksjonssymboler av grad 3 kan være tom for noen intensjonale språk i vid forstand.

(ix) *For hvert nêN;1 en mengde (muligens tom) av n-ære predikater.* Vi bruker "P","Q", "R", eventuelt med indekser og apostrofer som syntaktiske variabler for tegn av denne kategori. Når det gjelder predikatene er følgende å bemerke:

(a) Vi fastsetter at i ethvert intensjonalt språk L skal mengden av binære predikater alltid inneholde predikatet "=" for identitet.

(b) Vi fastsetter videre at i ethvert intensjonalt språk L i vid forstand skal vi, for hvert par <m,n>êNXN ha et m+1'ært predikat t;<m,n>. Vi regner indekseringsfunksjonen t med til språket. Vi kaller t;<m,n> for den intensjonale predikatkonstanten som svarer til operatoren T;<m,n>.

(c) Vi fastsetter videre at ethvert intensjonalt språk L i vid forstand skal inneholde et predikat U som er distinkt fra predikatene nevnt under (a) og(b). I mangel av et bedre navn skal vi kalle dette predikatet for "utsagnspredikatet". En formel av typen "U(x)" kan leses "x er et utsagn".

Dermed har vi gitt en fullstendig liste over alle de uttrykk som inngår i vokabularet til et intensjonalt språk L i vid forstand.

## §1.1 Induktiv definisjon av termer og formler i intensjonale språk i vid forstand.

---

6 Det kan på dette punkt være passende å sitere Hintikka fra forordet i "Models for modalities": "I am aware of being even more casual than usual with that fetish of second-rate logicians, quotes and use and mention. My appeal here is to the principle that one is to be considered innocent until one has been found guilty of an actual confusion caused by a failure to tell use from mention."

Klassen av termer i et intensjonalt språk L i vid forstand, i symboler "Term(L)", og klassen av formler i et intensjonalt språk L i vid forstand, i symboler "Fml(L)", er definert ved simultan induksjon på lengden av formler og termer på den følgende måte:

(i) Er a et variabeltegn, konstant eller en singulær term i snever forstand er a en term.
(ii) Er F en formel og x et variabeltegn er (ix)F en term.
(iii) Er F en formel er μ(F) en term.
(iv) Er t;1,...,t;n n termer og er f et n-ært funksjonssymbol så er f(t;1,...,t;n) en term.
(v) Er t;1,...,t;n termer og P et n-ært predikat (n≥1) så er P(t;1,...,t;n) en formel.
(vi) Er F og G formler så er (F–>G) og ¬F formler.
(vii) Er x et variabeltegn og F en formel så er (Ax)F en formel.
(viii) Er t;1,...,t;m termer og F en formel er T;<m,n>(t;1,...,t;m,F) en formel.
(ix) Ingen andre uttrykk enn dem som er det i følge (i) – (viii) er formler eller termer.

Anta at L er et intensjonalt språk hva enten det er et språk i vid forstand eller snever forstand. Vi skal da bruke "Singterm(L)" for å betegne mengden av singulære termer i snever forstand i L, "Const(L)" for å betegne klassen av konstanter i L, "Var(L)" for å betegne klassen av konstanter i L, "Pred;n(L)" (n≥1) for å betegne klassen av n-ære predikater i L og "Funk;n(L)" (n≥1) for å betegne klassen av n-ære funksjonssymboler i L. Dessuten bruker vi "CFml(L)" for mengden av de lukkede formlene i L og "CTerm(L)" for mengden av de lukkede termene i L. Uttrykkene "t", "t;1",....,"t;n", eventuelt påført apostrofer og forskjellige indekser, vil normalt bli brukt som syntaktiske variabler for termer. "F", "G", "H" – igjen eventuelt med påført indekser eller apostrofer –, brukes som syntaktiske variabler for formler. Endelig bemerkes det at vi kaller en term for *enkel* om den enten er en konstant eller et variabeltegn.

## §1.2 Notasjon for substitusjon av termer og formler. Forkortelser.

De vanlige begrepene om fri variabel i en term eller en formel, bundet variabel, variabel som er fri for en term i en formel (term), lukket formel etc. er definert på vanlig måte og vi forutsetter at leseren kjenner definisjonene av disse begrepene.

Vi bruker notasjonen "F;x[t]" for å betegne resultatet av å substituere termen t for alle fri forekomster av x i F forutsatt at x er fri for t i F, dvs. at ingen kvantorer i F binder fri variabler i t når denne settes inn for en fri forekomst av x. Likedan bruker vi notasjonen "t;x[t']" for resultatet av substituere t' for alle fri forekomster av x i t forutsatt at x er fri for t' i t. I det følgende betegner F;(x;1,...,x;n)[t;1,...,t;n] resultatet av å substituere termene t;1,...,t;n simultant for x;1,...,x;n i F på de steder der variabeltegnene x;1,...,x;n forkommer fri. Det forutsettes selvfølgelig at x;i er fri for t;i i F om i=1,...,n. Notasjonen t;(x;1,...,x;n)[t;1,...,t;n] forklares helt analogt.

Vi skal bruke de følgende vanlige forkortelser, som forøvrig ble nevnt ovenfor i §1: "(Ex)F" brukes som forkortelse for "¬(Ax)¬F)". "FvG" brukes som forkortelse for "(¬F) –> G". "F&G" brukes som forkortelse for "¬((¬F) v (¬G))". Endelig brukes "F<–>G" som forkortelse for "(F–>G) & (G–>F)".

### §1.2.1 Definisjon av "logisk symbol" og "logisk vokabular".

Med de *logiske symbolene* i et intensjonalt språk i vid forstand forstår vi de setningslogiske konnektivene ¬ og –>, allkvantoren A, beskrivelsesoperatoren i, alle de intensjonale operatorene T;<m,n> for <m,n>êNXN, utsagnsabstraksjons-operatoren μ, de diverse predikatene t;<m,n> for <m,n>êNXN, identitets-predikatet =, predikatet U, samt alle variabeltegnene.

Med det *logiske vokabularet* til et intensjonalt språk i vid forstand forstår vi systemet av de logiske symbolene samt indekseringsfunksjonene T og t.

Et intensjonalt språk i vid forstand vil i det følgende bli kalt for et I;0-språk. Mengden av alle slike språk skal vi betegne med "(I;0)*". Det skulle være klart at relasjonen "å ha samme logiske vokabular som" er en ekvivalensrelasjon over (I;0)* som deler inn (I;0)* i innbyrdes ikke-tomme, disjunkte ekvivalensklasser som samlet uttømmer den totale mengden av slike språk. I det følgende vil vi alltid når vi snakker om I;0-språk tenke oss at de er hentet fra en og samme ekvivalensklasse. Denne tenker vi oss fastsatt en gang for alle.

De symbolene i vokabularet til et I;0-språk som ikke er logiske kaller vi *ikke-logiske* eller *deskriptive* symboler i språket.

### §1.3 Definisjon av "intensjonalt språk i snever betydning" – "J:0-språk"

Met intensjonalt språk i snever betydning, eller hva som også fra nå av primært vil bli kalt et J;0-språk, forstår vi det samme som et I;0-språk bortsett fra at man nå har utelatt utsagnsabstraksjonsoperatoren, de intensjonale predikatkonstantene t;<m,n> for <m,n>êNXN og predikatet U. Forøvrig er slike språk definert nøyaktig som I;0-språk. I definisjonen av formler og termer i §1.1 utelater vi selvfølgelig klausul (iii), men ellers kan definisjonen benyttes slik den står. Vi har med andre ord at termene og formlene i et intensjonalt språk i snever betydning er definert ved simultan induksjon ved de følgende klausuler:

(i) Er a et variabeltegn, konstant eller en singulær term i snever forstand er a en term.
(ii) Er F en formel og x et variabeltegn er (ix)F en term.
(iii) Er t;1,...,t;n n termer og er f et n-ært funksjonssymbol så er f(t;1,...,t;n) en term.
(iv) Er t;1,...,t;n termer og P et n-ært predikat (n≥1) så er P(t;1,...,t;n) en formel.
(v) Er F og G formler så er (F–>G) og ¬F formler.
(vi) Er x et variabeltegn og F en formel så er (Ax)F en formel.
(vii) Er t;1,...,t;m termer og F en formel er T;<m,n>(t;1,...,t;m,F) en formel.
(viii) Ingen andre uttrykk enn dem som er det i følge (i) – (viii) er formler eller termer.

Vi bruker uttrykket "(J;0)*" for å betegne klassen av alle J;0-språk i den betydningen vi nå har avgrenset. Relasjonen "å ha samme vokabular som" vil også nå være en ekvivalensrelasjon som inndeler (J;0)* i ekvivalensklasser. I det følgende tenker vi oss at vi har valgt ut en slik ekvivalensklasse og at de J;0-språkene vi omtaler er hentet fra denne.

### §1.4 Definisjon av en relasjon mellom språk: "L:2 er et språk for L:1". Definisjon av uttrykket "L-morfi"

Vi trenger to begreper i forbindelse med språk for å kunne gi en tilfredsstillende definisjon av

den typen modeller vi har i tankene. Hva som menes med en modell for intensjonale språk av den typen vi nå har definert vil bli forklart i Kapittel II.

Anta at L;1 og L;2 er språk av nøyaktig samme type, dvs. at begge har nøyaktig det samme logiske vokabularet og at de begge enten er I;0-språk eller J;0-språk. Vi definerer da hva som menes med "L;1 er et språk for L;2 ved den følgende definisjon:

**Definisjon 1.4.1** L;1 er et språk for L;2 hvis og bare hvis L;1 og L;2 oppfyller de følgende krav:

(i) Mengden av de singulære termene i snever forstand i L;1 er minst likemektig med mengden av de singulære termene i snever forstand i L;2.
(ii) Const(L;1) ≠ø.
(iii) For alle n≥1 er Pred;n(L;1) minst likemektig med Pred;n(L;2).
(iv) For alle n≥1 er Funk;n(L;1) minst likemektig med Funk;n(L;2).

Er L;2 et språk for L;1 er en L-morfi en funksjon som avbilder formlene og termene i L;1 inn i L;2. Mer presist er en L-morfi definert på den følgende måte i det vi forutsetter at L;1 og L;2 er språk med det samme logiske vokabularet og at de begge enten er I;0-språk eller J;0-språk.

**Definisjon 1.4.2** Med en L-morfi fra L;1 over i L;2 forstås en funksjon g som tilfredsstiller de følgende krav i det man forutsetter at L;2 er et språk for L;1:

(i) g avbilder Const(L;1) inn i Const(L;2)
(ii) g avbilder en-entydig Singterm(L;1) på en delmengde X Inkl Singterm(L;2).
(iii) For alle m≥1 avbilder g Pred;m(L;1) en-entydig på en mengde X inkl Pred;m(L;2). Har man at P enten er "=", "t;<m,n>" eller U krever vi at g(P) = P.
(iv) For alle m≥1 avbilder g Funk;m(L;1) en-entydig på en mengde X inkl Funk;m(L;2)
(v) g tilordner enhver term i L;1 en term i L;2 i det vi setter:
  (1) g(x) = x om x er et variabeltegn i L;1
  (2) g(f(t;1,...,t;n)) = g(f)(g(t;1),....,g(t;n))
  (3) g(μ(F)) = μ(g(F))
  (4) g((ix)F) = (ix)g(F)
(vi) g tilordner enhver formel F i L;1 en formel g(F) i L;2 i det vi setter:
  (5) g(P(t;1,...,t;n)) = g(P)(g(t;1),...,g(t;n)) forutsatt at P er et n-ært predikat i L;1 og t;1,..,t;n termer i L;1.
  (6) g(¬F) = ¬g(F)
  (7) g(F–>G) = g(F) –> g(G)
  (8) g((Ax)F) = (Ax)g(F)
  (9) g(T;<m,n>(t;1,...,t;m,F)) = T;<m,n>(g(t;1),...,g(t;m),g(F)) forutsatt at t;1,..,t;m er termer i L;1.

## §2 Kommentarer til de språktypene som er introdusert. Forklaringer og motivasjon. Eksempler.

Vi har i de foregående paragrafer definert to typer av språk. La oss kort oppsummere hvordan de forholder seg til hverandre.

Selv om vi har definert I;0-språkene først er J;0-språkene i en viss forstand den

grunnleggende typen. Som man ser er et J;0-språk i det vesentlige et vanlig først-ordens språk med konstanter, identitet og funksjonssymboler utvidet med intensjonale operatorer T;<m,n>. I tillegg kommer beskrivelsesoperatoren i, samt en ny kategori av uttrykk som vi har kalt singulære termer i snever forstand (Vi skal straks forklare vår terminologi på dette punkt nærmere). Et I;0-språk er så et J;0-språk utvidet med en termdannende operator μ på formler, samt predikatkonstanter t;<m,n> og U. Merk at i et I;0-språk har predikatene t;<m,n> og U nøyaktig samme status som identitetstegnet "=" i vanlig predikatlogikk. La oss kalle dette tilleggsapparatet som skiller I;0-språk fra J;0-språk for "utsagns-abstraksjonsapparatet".

I et J;0-språk er det hensikten at alle komponentene utenom de intensjonale operatorene skal oppfattes på vanlig måte. A er ment å uttrykke den vanlige allkvantoren, ¬ og –> står for henholdsvis vanlig negasjon og materiell implikasjon. Setninger av formen "¬F" er det derfor meningen at skal leses "Det er ikke slik at F", setninger av typen "F–>G" leses "Hvis det er slik at F så er det slik at G". De andre definerte konnektivene som brukes i predikat-logikken har derfor også selvfølgelig sin vanlige betydning.

Et punkt er imidlertid viktig og må ikke misforstås. Vi har innført konstanter og en spesiell kategori av uttrykk som vi har kalt singulære termer i snever betydning. Slik vi bruker uttrykket "singulær term i snever betydning" betegner dette det som vanligvis kalles for singulære termer, men som ikke umiddelbart og ukontroversielt kan analyseres ved hjelp av beskrivelsesoperatoren eller funksjonssymboler. Det dreier seg altså om termer som i alle fall ikke på overflaten har formen "(ix)F" eller "f(t;1,...,t;n)". Vanlige egennavn som eksempelvis "Aristoteles" eller "Platon" kan oppfattes som singulære termer i snever betydning slik denne kategorien av uttrykk oppfattes her. Likeledes faste navn på steder som "Nordpolen", "Sydpolen", eller navn på fysiske gjenstander som "Jupiter", "Aftenstjernen", "Morgenstjernen". I intensjonal logikk forekommer det meg å være det beste at man ikke med en gang forsøker å eliminere disse uttrykkene ved hjelp av Russel-Quines teori om bestemte beskrivelser, men snarere inkorporerer dem i uanalysert form i språket.

Våre konstanter er "rigid designators". De må ikke forveksles med singu-lære termer i betydningen ovenfor. Hovedforskjellen er at vi gir konstantene en slik intepretasjon at koreferensielle konstanter kan substitueres fritt for hverandre i alle kontekster salva veritate, – også intensjonale –, mens dette ikke gjelder for de singulære termene, f. eks. "Morgenstjernen" og " Aftenstjernen". Som bekjent refererer disse to uttrykkene til den samme fysiske gjenstand, men det er likevel mulig at en person kan vite at Morgenstjernen er planet uten å vite at Aftenstjernen er det. Når vi presenterer vår semantiske teori for I;0- og J;0-språk i neste kapittel vil denne forskjellen komme tydeligere frem.

Hovedforskjellen mellom J;0-språk og vanlige første-ordens språk ligger i at de første inneholder intensjonale operatorer mens de siste ikke gjør det. Slik vi har definert J;0-språk har vi tenkt oss de intensjonale operatorene indeksert på NXN. Er T;<m,n> en intensjonal operator angir tallet m antallet termer operatoren virker på og tallet n nummeret til den. At indeksmengden er NXN innebærer at det skal være uendelig mange intensjonale operatorer i et J;0-språk. Ved konkrete anvendelser behøver vi ikke å la indeksmengden være NXN, men kan la den være en delmengde av NXN, f.eks. h1Xh2 der h1={0,...,k} og der man har h2={0,...,r} for noen naturlige tall k,r ≥0. Det er altså ingen ting i veien for å betrakte J;0-språk som bare har to intensjonale operatorer T;<0,0> og T;<0,1> der den første er "Det er logisk nødvendig at – " og den andre er "Det er påbudt at –". Indeksmengden til disse J;0-språkene vil da være {<0,0>,<0,1>}. I det følgende vil vi stort sett la det stå åpent hvilke intensjonale operatorer våre J;0-språk skal inneholde fordi overveielsene og resonnementene vi fremlegger er av en prinsipiell og generell natur.

Er T;<m,n> en intensjonal operator, angir som nevnt m antallet termer operatoren virker på. Vi vil kalle m for antallet variabelsteder til operatoren. Eksempler på intensjonale operatorer med 0 variabelsteder er slike som "Det er nødvendig at – ", "Det er mulig at – ",

"Det er sikkert at –", "Det er sannsynlig at –". Eksempler på operatorer med et variabelsted er slike som " - vet at – ",
"- tror at – ", "- er klar over at – " etc. Føyer man ved disse eksemplene inn en term på det første åpne stedet og en setning inn på det andre får man som resultat en formel eller en setning. Eksempler på intensjonale operatorer med to variabelsteder er slike som "- sier til - at –", "- spør - om det er slik at –". Setter man i disse uttrykkene inn termer på de to første stedene hvor det står "-" og en setning på det siste stedet for det står "–" får man som resultat en setning. For den første operatorens vedkommende får man f.eks. setningen "Tom sier til Jens at denne avhandlingen er null verdt" om man setter inn "Tom" og "Jens" på de to første åpne stedene og setningen "Denne avhandlingen er null verdt" på det tredje stedet. Det er naturligvis tvilsomt om det finnes intensjonale operatorer i vanlig språk med la oss si 10 variabelsteder. Vi har imidlertid betraktet situasjonen der våre språk inneholder intensjonale operatorer med vilkårlig antall variabelsteder fordi det representerer en naturlig generalisering og fordi det ville være kunstig å begrense seg til et bestemt antall.

Som et konkret eksempel på en klasse med J;0-språk[7] velger vi, nokså vilkårlig ut den følgende klasse der de intensjonale operatorene er indeksert på mengden {<0,0>}U{<x,y>: xê{1} & yê{0,...,10}. Selve operatorene er:

(I) T;<0,0>er "Det er logisk nødvendig at – "
T;<1,0> er "– vet at – "
T;<1,1> er "– tror at – "
T;<1,2> er "– ser at – "
T;<1,3> er "– hører at – "
T;<1,4> er "– har et inntrykk av at – "
T;<1,5> er "– iaktar at – "
T;<1,6> er "– ser ved det blotte øye at – "
T;<1,7> er "– er fullstendig overbevist om at – "
T;<1,8> er "– er klar over at – "
T;<1,9> er "– er i tvil om at – "
T;<1,10> er "– er ute av stand til å innse at – "

I klassen av all de J;0-språk der det logiske vokabularet inneholder disse og bare disse intensjonale operatorene vil det være noen der det ikke-logiske vokabularet er meget rikholdig. Man får tenke seg her at det logiske vokabularet er supplert med et rikt forråd av ikke-logiske predikater, singulære termer og funksjonsymboler.

Før vi går over til I;0-språkene bemerker vi to ting i forbindelse med J;0-språkene. For det første tillater vi kvantifikasjon inn i intensjonale kontekster. Eksempelvis er setningen velformet:

---

[7] Det eksemplet som her gis på et intensjonalt språk er selvfølgelig bare et eksempel. Man kunne ha spesifisert et annet språk med for eksempel flere operatorer. Det er to ting som kan bemerkes i forbindelse med dette eksemplet: (i) For det første inneholder våre språk bare en type av variabler. Vi har ikke innført spesielle variabler for bestemte kategorier av ting, f.eks. fysiske objekter, personer eller tidspunkter, slik at f.eks. setningen T;<1,0>(x,F) bare regnes som velformet om x er et varaibeltegn av den typen som tar personer som verdier. (ii) Vi har heller ikke innført tidsvariabeler i språket. Selvfølgelig kan man betrakte et J;0-språk der man har en operator T;<2,0> der en formel av typen "T;<2,0>(x,y,F)" leses "x tror ved tidspunktet y at F". Men det er ikke nødvendig å innføre spesielle variabeltegn som bare tar tidspunkter som verdier av den grunn. Det er intet som forhindrer oss fra å eventuelt eliminere dem ved å innføre et bestemt predikat, la oss si "Tp(x)", som leses "x er et tidspunkt, og så erstatte enhver setning av formen "(At)P(t)" med en av typen "(Ax)(Tp(x) –> P(x)). Tilsvarende for eksistensielle setninger og andre typer av setninger. På denne måten kan man fjerne alle forekomster av spesielle tidsvariabler i alle formler. Det er åpenbart mulig å konstruere et "many-sorted" system, men siden dette ikke vil bringe inn noe vesentlig nytt har vi ikke sett noe poeng ved å komplisere systemet ytterligere på denne måten.

(Ax)T;<1,0>(a,G(x))

Her kan man tenke seg at "G(x)" forkorter, la oss si "x er en rød gjenstand", og at a er en konstant. For det andre tillater vi vilkårlig iterasjon av de intensjonale operatorene. Den følgende setning er derfor også velformet:

(Ex)(T;<1,0>(x, (Ey)(T;<1,2>(y,G(x)))))

I et I;0-språk har vi stipulert at predikatmengden skal inneholde en mengde med hva vi har kalt intensjonale predikatkonstanter t;<m,n> (m,nêN) som svarer til operatorene T;<m,n>. Vi har ovenfor spesifisert en klasse av J;0-språk der operatorene var T;<0,0> og T;<1,0>, ... , T;<1,10>. Til disse operatorene skal det i et I;0-språk svare bestemte predikater t;<0,0> og t;<1,0>, ...., t;<1,10>. Hva uttrykker så disse nye predikatene? Hvordan skal de leses ? I denne forbindelse er det å bemerke at t;<0,0> skal være predikatet " – er tilfelle med logisk nødvendighet". Videre vil de følgene binære predikater være dem som svarer til T;<1,0>,..., T;<1,10>:

(II) t;<1,0> er "– vet – "
t;<1,1> er "– tror – "
t;<1,2> er "– ser – "
t;<1,3> er "– hører – "
t;<1,4> er "– har et inntrykk av – "
t;<1,5> er "– iaktar – "
t;<1,6> er "– ser ved det blotte øye – "
t;<1,7> er "– er fullstendig overbevist om – "
t;<1,8> er "– er klar over – "
t;<1,9> er "– er i tvil om – "
t;<1,10> er "– er ute av stand til å innse – "

Man ser at det er en en-entydig korrespondanse mellom de intensjonale operatorene og predikatkonstantene ovenfor. Til operatoren "– vet at –" svarer det binære predikatet " – vet – ". Det kan virke rimelig å tro at man til enhver intensjonal operator T;<m,n> kan finne et korresponderende predikat av typen t;<m,n>. Dette er illustrert ved de to listene ovenfor. Det er denne nære og naturlige sammenheng som vi har generalisert i våre I;0-språk.

Et tredje trekk ved I;0-språkene er at de inneholder en utsagnsabstraksjons-operator μ. Som nevnt tidligere er det tanken at en term av typen "μ(F)" skal leses "at F" eller "det at F". Man kan også tillate seg å lese dette uttrykket som "at F er tilfelle". Som man umiddelbart ser, og som vi også tidligere har nevnt, er μ en termdannende operator på formler. Ser man nå på formelen:

t;<1,1>(x,μ(F))

kan denne leses "x tror at F er tilfelle". I denne setningen fungerer altså "at F er tilfelle" som et navn. Det har samme status som andre egennavn, eller f.eks. termer av typen "2+2", "2^(1/2)". La oss også nevne at μ selvfølgelig er en operator av et helt annet slag enn de diverse T;<m,n>. μ er en termdannende operator. De forskjellige T;<m,n> er formeldannende operatorer.

Som man skjønner er det meningen at formler av typen:

(a) $t;\langle 1,1\rangle(x,\mu(F)) \leftrightarrow T;\langle 1,1\rangle(x, \mu(F))$

skal være gyldige i I;0-språk. Mer generelt ønsker vi at alle formler av typen:

(b) $t;\langle m,n\rangle(x;1,...,x;m,\mu(F)) \leftrightarrow T;\langle m,n\rangle(x;1,...,x;m,F)$

skal være gyldige i I;0-språk.

Vi har kalt μ for en "utsagnsabstraksjonsoperator" i mangel av et bedre navn. Det kan diskuteres hvor heldig denne terminologien er. Vanligvis står "utsagn" i filosofiske sammenhenger for det som ofte kalles for "propositions". Et trekk ved "propositions" er at de vanligvis oppfattes som det meningsinnhold som uttrykkes ved deklarative setninger, det vil si setninger som enten er sanne eller usanne. Denne typen entiteter har også av og til blitt forslått som objekter for de såkalte "propositional attitudes", det vil i grunnen si som verdier for variablen y i slike setninger som $t;\langle 1,0\rangle(x,y)$ og $t;\langle 1,1\rangle(x,y)$ osv. Sagt på en annen måte innebærer dette at "propositions" har blitt oppfattet som ting av den typen man tror er tilfelle, vet er tilfelle, føler eller tenker seg er tilfelle. Man kan fortsette gjennom rekken av psykologiske verb.

En egenskap som ofte har blitt tillagt utsagn i denne betydning er at deklarative setninger som er logisk ekvivalente uttrykker det samme utsagn. Innfører vi akkurat her ß for utsagnsabstraksjon i denne betydningen, det vil si som en operator som når den føyes til foran en deskriptiv setning gir oss et navn på det utsagnet den deskriptive setningen uttrykker, kan dette prinsippet formuleres ved å si at en setning av typen ß(F) = ß(G) er sann hvis og bare hvis F og G er logisk ekvivalente. Dette gjør det imidlertid etter min mening umulig å tolke f.eks. operatoren "– tror at –" ved hjelp av predikatet "– tror er tilfelle –" og operatoren ß. Man kan ikke da generelt ha:

(0) $T;\langle 1,1\rangle(x,F) \leftrightarrow t;\langle 1,1\rangle(x,ß(F))$.

For anta at F<–> G er en meget komplisert logisk sannhet. Da har man i lys av prinsippet ovenfor at setningen ß(F) = ß(G) er sann. Dette impliserer i lys av (0) at:

(1) $T;\langle 1,1\rangle(x,F) \leftrightarrow T;\langle 1,1\rangle(x,G)$

Men dette behøver ikke å være riktig for alle verdier av x. Man kan godt tenke seg en person a der det er riktig at a tror at F er tilfelle, med andre ord at $T;\langle 1,1\rangle(a,F)$, men der det er helt galt å hevde at a tror at G er tilfelle, det vil si $T;\langle 1,1\rangle(a,G)$. Personen a behøver ikke å ha gjennomskuet den logiske forbindelse mellom F og G og ser ikke at de er ekvivalente. Siden vi ønsker at (a) og (b) ovenfor skal være gyldige – noe som virker naturlig og rimelig – følger det at μ-operatoren slik den er tenkt innført i forbindelse med I;0-språk er av et annet slag en operatoren ß som vi nå har betraktet. Begge kan selvfølgelig med en viss rett kalles utsagnsabstraksjonsoperatorer. Poenget er imidlertid at man bør holde dem fra hverandre.

Vi har i et intensjonalt språk i vid forstand inkludert et unært predikat U blandt de logiske symbolene. Det er meningen at dette skal tolkes slik at det blir sant om de ting som betegnes av uttrykk av typen μ(F) der F er en deklarativ setning. Vi skal i det følgende konsekvent kalle den type av entiteter som predikatet U er sant om for "intensjoner".[8] I lys

[8] Vi har valgt å kalle referansene til singulære termer av typen "μ(F)" for "intensjoner". Kanskje dette er uheldig siden ordet "intensjon" vanligvis brukes som fellesbetegnelse for slike ting som "propositions", attributter og individuelle begereper. Andre uttrykk som kunne tas i betraktning i stedet for "intensjon", men som det er vanskelig å skjønne at skulle være noe mer dekkende, er "saksforhold", "mulig saksforhold", "utsagn", "proposition". De to første uttrykkene er neppe særlig heldige, Med saksforhold er man tilbøyelig til å assosiere noe fysisk og konkret. Men f.eks. μ((Ax)(x=x), det at enhver ting er identisk med seg selv, eller f.eks. μ((Ex)(x=2), det at det finnes noe som er identisk med tallet 2, kan neppe regnes for noe konkret eller

av dette vil det være naturlig å forvente at formelen "Uμ(F)" er gyldig for enhver formel F. Det er også naturlig å kreve at formelen "t;<m,n>(x;1,....,x;m,y) –> U(y)" er gyldig (m,n≥0). Har man at <m,n>= <1,0> sier denne formelen at dersom x vet y er tilfelle så er y en intensjon. Tilsvarende uttrykker denne formelen dersom <m,n>=<1,1> at dersom x tror y er tilfelle så er y en intensjon. På tilsvarende vis forholder det seg ved de andre intensjonale operatorene vi har betraktet. De entitetene som derfor er objekter for de såkalte "propositional attitudes" er derfor intensjoner hvis den teorien som etterhvert vil bli undersøkt nærmere her legges til grunn.

Som vi nå har understreket refererer uttrykk av typen "μ(F)" til inten-sjoner. Men det må bemerkes at vi ennå ikke har gitt uttrykket "intensjon" en helt eksakt, skarp og velavgrenset betydning. Vi har for eksempel ikke gitt noe bestemt identitetskriterium for intensjoner. Det eneste som hittil er klart er at intensjoner i den betydning som nå er innført må være finere individuert enn "propositions", utsagn i den mer tradisjonelle betydning. Dette innebærer at to deskriptive setninger som er logisk ekvivalente kan uttrykke distinkte intensjoner. Når det gjelder de såkalte "propositional attitudes" synes det imidlertid ikke å være noe i veien for å la objektene for dem være så fint individuert som mulig. I et senere kapittel skal vi vise at dette er nødvendig om man vil opprettholde bikondisjonalen (b) ovenfor. I alle tilfelle virker det naturlig å beholde denne fordi vi da kan gi en analyse av de intensjonale operatorene. Dette innebærer at vi i prinsippet da kan definere dem ved hjelp av t;<m,n>-predikatene og utsagnsabstraksjonsoperatoren μ. Strengt tatt behøver vi ikke innføre dem som primitive konstruksjoner.

Det forekommer meg helt forsvarlig å innføre et identitetskriterium for intensjoner som er så strengt at intensjoner som er uttrykt av distinkte deskriptive setninger selv er distinkte. Vi skal se nøyere på hvordan dette kan gjøres presist når vi spesifiserer vår semantiske teori for I;0-språk i neste kapittel.

La oss avslutte med noen få bemerkninger. Som man ser tillater vi ubegrenset iterasjon av de intensjonale operatorene. Vi kan derfor lett uttrykke en påstand som for eksempel at a vet at b tror at jorden er rund. Likeledes tillater vi ubegrenset iterasjon av utsagnsabstraksjonsoperatoren. Dette vil si at i en setning av formen "μ(F)" kan F inneholde et vilkårlig antall forekomster av μ. Videre tillater vi kvantifikasjon inn i intensjonale kontekster. En formel som for eksempel:

$$(Ex)(G(x) \,\&\, (Ey)(y = \mu(G(x)))$$

er velformet og meningsfull i alle de logiske systemene som vil bli presentert her. Takket være at vi har med intensjonale predikatkonstanter kan man også uttrykke påstander som eksempelvis at personen a tror noe er tilfelle som b ikke tror er tilfelle, eller at a ser noe er tilfelle som b ikke ser er tilfelle, eller – for å gi et siste eksempel –, en påstand som at personen a tror nøyaktig det samme som personen b. Denne siste påstanden kan i vår symbolisme formuleres slik:

$$(Ay)(t;\langle 1,1\rangle(a,y) \;\langle\!-\!\rangle\; t;\langle 1,1\rangle(b,y))$$

---

fysisk. Snarer synes det å dreie seg om rent abstrakte entiteter. Dessuten er μ((Ex)(x≠x)) noe som selvfølgelig eksisterer om teorien ovenfor legges til grunn, med det virker unaturlig å kalle dette et saksforhold. Man kan også finne at det er mindre heldig å kalle det et mulig saksforhold siden det er tvilsomt om det kan realiseres i noen klar betydning. De to sistnevnte uttrykkene virker heller ikke bedre. For uttrykket "proposition" foreligger det allerede en etablert bruk. Uttrykket står da for størrelser som er grovere individuert enn det vi sikter til med "intensjoner". Man kan også ha reservasjoner ved "utsagn". Delvis er det flertydig : det synes av og til å bety en bestemt type av talehandlinger og av og til å bety det man sikter til ved "propositions". Dessuten synes det unaturlig å si at man f.eks. ser, hører, ser, kjenner tror eller vet et utsagn er tilfelle. Av disse grunner kunne man kanskje tro at ordet "intensjon" er en smule bedre. Denne terminologien vil bli fastholdt i det følgende.

Man ser nokså lett at ingen av disse påstandene kan uttrykkes på noen likefrem måte i et J;0-språk. Dette er en av grunnene til at vi har innført apparatet med utsagnsabstraksjon og intensjonale predikatkonstanter. Det bidrar til å øke uttrykkskraften i våre språk.

# Kapittel II

Semantikk

## §1 Definisjon av I:0-modellstruktur for et I:0-språk L. Definisjon av J:0-modellstruktur for et J:0-språk L.

Vi skal i dette kapitlet spesifisere vår semantiske teori for de språkene som ble definert i Kapittel I.[9] I denne paragrafen gir vi først en definisjon av hva som forstås ved en I;0-modellstruktur for et språk L der L er et I;0-språk. Dernest gis en definisjon av hva som forstås med en J;0-modellstruktur for et J;0-språk L. I de neste paragrafene vil vi så gjøre rede for hva som forstås med I;0-modeller og J;0-modeller. Videre vil vi gjøre rekke for sentrale begreper i forbindelse med disse typene av modeller. Det dreier seg om definisjoner av hva som forstås med at en formel er gyldig i en modell og hva som menes med at en formel er gyldig. Det vil også gis definisjoner av hva som menes med at en formelmengde er konsistent og hva som menes med at en formel er en logisk konsekvens av formlene i en formelmengde Δ.

La oss først definere predikatet "m er en I;0-modellstruktur for språket L. Dette skjer ved den følgende definisjon:

**Definisjon 1.1** La L være et I;0-språk. Med en I;0-modellstruktur m for L forstår vi et tuple:

m = <*, D, f, £, <*f*;<m,n>>/<m,n>êNXN/, G>

der de forskjellige komponentene oppfyller de følgende krav:

(i) D er en ikke-tom mengde.

(ii) * er et objekt som ikke er med i D

(iii) £ er et I;0-språk for L [10]

(iv) f er en en-entydig funksjon med mengden D som domene og der verdiområdet er Const(£). Man har med andre ord:

f : D–(1-1,på)–> Const(£).

(v) *f*;<m,n>, for hvert par <m,n>êNXN er en funksjon med D^m som domene og der verdiområdet er inkludert i Pt(CFml(£)). Man har altså for alle <m,n>êNXN at *f*;<m,n> : D^m –> Pt(CFml(£)). Her betegner "D^m" det m'te kartesiske produkt av D med seg selv.

(vi) G er en funksjon med CFml(£) som domene og der verdiområdet er inkludert i D, mao. G: CFml(£) –> D.

Dette gir en en fullstendig definisjon av hva som menes med en I;0-modellstruktur. I §7 vil det bli gitt en mer intuitiv redegjørelse for hva de enkelte komponentene i en slik struktur representerer.

La oss så formulere en helt analog definisjon av predikatet "m er en J;0-modellstruktur for L". Definisjonen blir helt lik bortsett fra at man har kuttet vekk det som har med

---

9 Teorien som blir presentert i det følgende er ikke ment som noen "universell" semantikk. Det er mulig at en syntese av denne teorien og en form for Kripke-semantikk er det man bør ta sikte på om man ønsker å konstruere mer omfattende systemer. Et system som f.eks. S5 synes å kunne behandles på en langt mer naturlig måte ved hjelp av mulige verdener (på en måte som er velkjent), selv om det kan karakteriseres innenfor den rammen som her blir beskrevet. For meget svake systemer, der f.eks. bevisbare ekvivalenter ikke kan subsitueres for hverandre innenfor området til intensjonale operatorer, synes imidlertid vår metode å kunne avendes med fordel. I denne forbindelse kan det nevnes at jeg ikke har sett hvordan systemer av typen J;0[∑,Ç] og I;0[∑,Ç] kan karakteriseres ved hjelp av mulige verdener. (Se kapittel VI, VII). Siden systemer av denne typen synes å være av viktighet ved studiet av slike operatorer som "x tror at – " og "x vet at –" og andre utpregede "propositional attitude"-operatorer, kan det reises tvil om Kripke-semantikken nødvendigvis må være adekvat ved analysen av alle intensjonale operatorer.

10 Se §1.4 i Kapittel I for definisjonen av relasjonen "L' er et I;0-språk for L".

funksjonen G å gjøre i en I;0-modellstruktur:

**Definisjon 1.2** La L være et J;0-språk. Med en J;0-modellstruktur m for L forstår vi et tuple:

m= <*, D, f, £, <$f$;<m,n>>/<m,n>êNXN/>

der de forskjellige komponentene oppfyller de følgende krav:

(i) D er en ikke-tom mengde.

(ii) * er et objekt som ikke er med i D

(iii) £ er et I;0-språk for L [11]

(iv) f er en en-entydig funksjon med mengden D som domene og der verdiområdet er Const(£). Man har med andre ord:

f : D–(1-1,på)–> Const(£).

(v) $f$;<m,n>, for hvert par <m,n>êNXN er en funksjon med D^m som domene og der verdiområdet er inkludert i Pt(CFml(£)). Man har altså for alle <m,n>êNXN at $f$;<m,n> : D^m –> Pt(CFml(£)).

Dermed har vi detaljert gjort rede for den type modellstrukturer som vi hovedsakelig vil arbeide med i resten av denne avhandlingen.

## §2 Navn

La D være en eller annen mengde og la L være enten et I;0-språk eller et J;0-språk. Med L(D) forstår vi L utvidet med nye konstanter som er i en-entydig korrespondanse med elementene i D. Vi kaller disse nye konstantene for *navn* og skal bruke "i", "j" eventuelt påført indekser og apostrofer som syntaktiske variabler for dem. Korrelasjonen mellom D og navnene i L(D) vil vi betegne med n. Det bør bemerkes at denne korrelasjonen har D som domene og at verdiområdet er inkludert i klassen av alle konstanter i L(D). Strengt tatt er det en tilsnikelse å snakke om språket L(D) siden dette språket ikke er entydig bestemt gitt L og D. Men for hvert par <L,D> må vi i mengden av alle utvidelser L' av L der L' fremkommer fra L ved utelukkende å legge til nye konstanter og der Const(L') – Const(L) ~ D tenke oss at vi har valgt ut et bestemt språk L;v. Dette kan vi så kalle L(D). I klassen av korrelasjoner mellom D og Const(L') – Const(L) må vi så tenke oss at vi har valgt ut en som går fra D over i Const(L') – Const(L). Denne kan vi så kalle n. For at man skal snakke meningsfullt om L(D) må man altså forutsette at man har gjort disse valgene for ethvert par <L,D>.

## §3.1 Definisjon av I:0-modell.

Vi har nå foretatt de nødvendige forberedelser slik at vi er i stand til å gi en presis definisjon av hva som menes med uttrykket "M er en I;0-modell for L".

Definisjonen er denne:

**Definisjon 3.1.1** La L være et I;0-språk. Med en I;0-modell M for L forstår vi et triple M = <m,g,∏> der:

m = <*, D, f, £, <$f$;<m,n>>/<m,n>êNXN/, G> er en I;0-modellstruktur for L, og der g og ∏ er funksjoner som oppfyller de følgende krav:

(i) g er en L-morfi fra L(D) over i £ der man krever at:

(1) g(i)= f(n;-1(i)) for ethvert navn i i L(D)

(ii) ∏ er en funksjon som oppfyller de følgende krav:

(1) ∏(i) =n;-1(i) om i er et navn i L(D)

[11] Se §1.4 i Kapittel I for definisjonen av relasjonen "L' er et I;0-språk for L".

(2) $\prod(e) = f;-1(g(e))$ om e er en konstant i L(D)
(3) $\prod(a) \hat{e} DU\{*\}$ om a er en singulær term i L(D)
(4) $\prod(\mu(F)) = G(g(F))$ om $F \hat{e} CFml(L(D))$
(5) $\prod(P)$ Inkl D^n om P er et n-ært predikat i L(D). ($n \geq 1$)
(6) $\prod(f)$ er en funksjon fra D^n over i D om f er et n-ært funksjonssymbol i L(D)
(7) $\prod(=) = Mg(<x,y>: x,y \hat{e} D \ \& \ x=y)$
(8) $\prod(t;<m,n>) = Mg(<x;1,...,x;m,y>: y \hat{e} G"(f;<m,n>(x;1,...,x;m)) \ \& \ x;1,...,x;m,y \hat{e} D)$
forutsatt at $<m,n> \hat{e} NXN$
(9) $\prod(U) = Rgn(G)$

(iii) $\prod$ er en funksjon som tilordner sannhetsverdier, enten 1 eller 0, til de lukkede formlene i L(D) og elementer i $\{*\} \cup D$ til de lukkede termene i L som ikke allerede er tilordnet en referanse. Dette skjer ved simultan induksjon på termer og formler i L(D) etter de følgende regler:

(10) Er P et n-ært predikat i L(D) og t;1,..,t;n lukkede termer i L(D) har man:
$\prod(P(t;1,..,t;n))=1 \ <-> \ <\prod(t;1),...,\prod(t;n)> \hat{e} \prod(P)$
(11) Er $F \hat{e} CFml(L(D))$ har man:
$\prod(\neg F) =1 \ <-> \ \prod(F)=0$
(12) Er $F,G \hat{e} CFml(L(D))$ har man:
$\prod(F -> G) =1 \ <-> \ (\prod(F)=1 -> \prod(G)=1)$
(13) Er $F \hat{e} CFml(L(D)$ har man:
$\prod(Ax)F)=1 \ <-> (Ar)(r \hat{e} D -> \prod(F;x[n(r)]) = 1)$
Dette innebærer at $\prod(Ax)F)=1$ hvis og bare hvis $\prod(F;x[i]) = 1$ for alle navn i som foreligger i L(D).
(14) Er t;1,...,t;m lukkede termer i L(D) og $F \hat{e} CFml(L(D))$ har man:
$\prod(T;<m,n>(t;1,...,t;m,F)) <-> g(F) \hat{e} f;<m,n>(\prod(t;1),....,\prod(t;m))$
Det forutsettes her at $<m,n> \hat{e} NXN$
(15) $\prod((ix)F) =a$ om det finnes et og bare et objekt $b \hat{e} D$ slik at $\prod(F;x[n(b)])=1$ og dette objektet b er identisk med a, ellers er $\prod((ix)F) =*$.
(16) Er f et n-ært funksjonssymbol i L(D) og t;1,...,t;n lukkede termer har man:
$\prod(f(t;1,...,t;n)) = \prod(f)(\prod(t;1),....,\prod(t;n))$ forutsatt at $\prod(t;i) \hat{e} D$ for $i = 1,...,n$. Ellers er $\prod(f(t;1,...,t;n)) =*$

Dermed har vi gitt en fullstendig definisjon av hva som forstås med en I;0-modell M. Er $M=<m,g,\prod>$ en slik modell kalles funksjonen $\prod$ for valuasjons-funksjonen i modellen M. I tilknytning til definisjonen ovenfor vil vi referere til klausulene (10) til (15) som "valuasjonsreglene" for de enkelte konstruksjonene i språket L.

La oss tilslutt bemerke at vi betegner klassen av alle I;0-modeller for L med "Mod;(I;0)(L)".

## §3.2 Definisjon av J:0-modeller.

Den andre viktige klassen av modeller som spiller en avgjørende rolle i dette arbeidet er det vi kaller J;0-modeller. Som ved I;0-modellene har nå foretatt de nødvendige forberedelser slik at vi er i stand til å gi en presis definisjon av hva som menes med uttrykket "M er en J;0-modell

for L" der det forutsettes at L er et J;0-språk.

Definisjonen blir temmelig lik den som ble gitt i forrige paragraf og kan formuleres slik:

**Definisjon 3.2.1** La L være et J;0-språk. Med en J;0-modell M for L forstår vi et triple M = <m,g,∏> der:

m = <*, D, f, £, <*f*;<m,n>>/<m,n>êNXN/> er en J;0-modellstruktur for L og der g og ∏ er funksjoner som oppfyller de følgende krav:

(i) g er en L-morfi fra L(D) over i £ der man krever at:

(1) g(i)= f(n;-1(i)) for ethvert navn i i L(D)

(ii) ∏ er en funksjon som oppfyller de følgende krav:

(1) ∏(i) =n;-1(i) om i er et navn i L(D)

(2) ∏(e) = f;-1(g(e)) om e er en konstant i L(D)

(3) ∏(a) êDU{*} om a er en singulær term i L(D)

(4) ∏(P) Inkl D^n om P er et n-ært predikat i L(D). (n≥1)

(5) ∏(f) er en funksjon fra D^n over i D om f er et n-ært funksjonssymbol i L(D)

(6) ∏(=) = Mg(<x,y>: x,yêD & x=y)

(iii) ∏ er en funksjon som tilordner sannhetsverdier, enten 1 eller 0, til de lukkede formlene i L(D) og elementer i {*}UD til de lukkede termene i L som ikke allerede er tilordnet en referanse. Dette skjer ved simultan induksjon på termer og formler i L(D) etter de følgende regler:

(7) Er P et n-ært predikat i L(D) og t;1,..,t;n lukkede termer i L(D) har man:

∏(P(t;1,..,t;n))=1 <–> <∏(t;1),...,∏(t;n)>ê∏(P)

(8) Er FêCFml(L(D)) har man:

∏(¬F) =1 <–> ∏(F)=0

(9) Er F,GêCFml(L(D)) har man:

∏(F–>G) =1 <–> (∏(F)=1 –> ∏(G)=1)

(10) Er FêCFml(L(D) har man:

∏(Ax)F)=1 <–> (Ar)(rêD –> ∏(F;x[n(r)]) = 1)

Dette innebærer at ∏(Ax)F)=1 hvis og bare hvis ∏(F;x[i]) = 1 for alle navn i som foreligger i L(D).

(11) Er t;1,...,t;m lukkede termer i L(D) og F êCFml(L(D)) har man:

∏(T;<m,n>(t;1,...,t;m,F)) <–> g(F)ê*f*;<m,n>(∏(t;1),....,∏(t;m))

Det forutsettes her at <m,n>êNXN

(12) ∏((ix)F) =a om det finnes et og bare et objekt bêD slik at ∏(F;x[n(b)])=1 og dette objektet b er identisk med a, ellers er ∏((ix)F) =*.

(13) Er f et n-ært funksjonssymbol i L(D) og t;1,...,t;n lukkede termer har man:

∏(f(t;1,...,t;n)) = ∏(f)(∏(t;1),....,∏(t;n)) forutsatt at ∏(t;i)êD for i = 1,...,n. Ellers er ∏(f(t;1,...,t;n)) =*

Man ser at denne definisjonen er helt analog med Definisjon 3.1.1. Forskjellene mellom dem er disse: I en J;0-modell <m,g,∏> har vi fjernet funksjonen G fra modellstrukturen m. Denne er nå en J;0-modellstruktur. Videre får vi definisjonen av ∏ i en J;0-modell ved å fjerne klausulene (4), (8) og (9) i Definisjon 3.1.1. Som man ser har disse med operatoren μ, predikatene t;<m,n> og predikatet U å gjøre. Men det er akkurat disse konstruksjonene som

som skiller mellom I;0 - og J;0-språk.

Klassen av alle J;0-modeller for L betegner vi med Mod;(J;0)(L).

## §4 Definisjoner av en del viktige semantiske begreper.

La M være enten en I;0-modell eller en J;0-modell. Med domenet i modellen M forstår vi domenet i modellstrukturen i M. Vi minner om at domenet i en modellstruktur er den andre komponenten i strukturen, dvs. den mengden i strukturen som vi hittil har betegnet med D. Vi skal tillate oss å bruke uttrykket "L(M)" for å betegne L(D) der D er domenet i modellen M og M er en modell for språket L.

La M være en modell for L og F en formel i L. Med en *M-instans av F* forstår vi enhver formel av typen F;(x;1,...,x;n)[i;1,...,i;n] der x;1,...,x;n er alle de fri variablene som forekommer i F og hvor i;1,...,i;n er navn i L(M).

Anta nå at M er en modell for L og at F er en formel i L. Vi sier da at F er gyldig i modellen M hvis og bare hvis vi har at $\prod(F')= 1$ for enhver M-instans F' av F i det vi forutsetter at M = <m,g,$\prod$>. Vi bruker notasjonen "Val(F,M)" for å uttrykke det forhold at formelen F er gyldig i modellen M. Vi skal også bruke notasjonen "M:=F" i denne forbindelse. Uttrykket "M:=F" leses da "F er gyldig i modellen M".

Er $\Delta$ en mengde med formler i L leses "Val($\Delta$,M)" som "M er en modell for formelklassen $\Delta$". Dette betyr at man har Val(F,M) for alle F$\hat{e}\Delta$. Formelt sett kan man definere "Val($\Delta$,M)" ved:

Val($\Delta$,M) <–> (AF)(F$\hat{e}\Delta$ –> M:=F)

Vi skal også bruke notasjonen "M := $\Delta$" isteden for "Val($\Delta$,M)".

Anta at M=<m,g,$\prod$> er en modell for L og at F er en formel i L, ie. F$\hat{e}$Fml(L). La x;1,...,x;n være variablene som forekommer fri i F og anta at disse er distinkte. La <a;1,...,a;n>$\hat{e}$D^n der D er domenet i modellen M. Vi sier da at <a;1,...,a;n> oppfyller F i modellen M, i symboler vil vi av og til skrive

"M:= F;(x;1,...,x;n)[a;1,...,a;n]"

hvis og bare hvis $\prod$(F;(x;1,...,x;n)[i;1,...,i;n]) =1 der i;k er navnet på a;i for i=1,..,n. Man sier at F er oppfyllbar i M hvis og bare hvis det finnes et tuple <a;1,...,a;n>$\hat{e}$D^n slik at M:= F;(x;1,...,x;n)[a;1,...,a;n].

La X være en eller annen klasse av modeller for L. Vi definerer da Val;L(X) som mengden av alle de formler F i L som er gyldige i enhver modell i klassen X.
Formelt kan dette begrepet defineres slik:

Val;L(X) = Mg(F: F$\hat{e}$Fml(L) & (AM)(M$\hat{e}$X –> M:= F)).

Vi sier at en formel F i L er gyldig i en klasse X av modeller for L hvis og bare hvis F$\hat{e}$Val;L(X). Det skulle være klart ut fra disse definisjonene at om X1 og X2 er klasser av modeller for L der X1 Inkl X2 så har man at: Val;L(X2) Inkl Val;L(X1).

Det kan være formålstjenlig å innføre litt mer notasjon. La L være et språk, F $\hat{e}$Fml(L) og $\Delta$ Inkl Fml(L). Vi setter da $\Delta$:= F hvis og bare hvis enhver modell M for L, som er en modell for $\Delta$, også er en modell for F.

Det bør bemerkes at vi har innført begrepene ovenfor på en generell måte. Overalt hvor vi har snakket om et språk L er det underforstått at dette enten er et I;0-språk eller et J;0-språk. La oss også gjøre oppmerksom på at dersom L er et J;0 språk, og vi uten kvalifikasjoner sier at M er en modell for L, så er det hensikten at vi selvfølgelig ønsker å si at M er en J;0-modell for L.

## §5 Notasjon i forbindelse med modellene.

Vi skal innføre en ny notasjon i forbindelse med våre modeller som er litt mer hensiktsmessig enn den vi hittil har brukt.

Bokstavene "R", "B", "C" brukes for å betegne modeller. Er R en I;0-modell så er R=<M,g,∏> der M= <*,D,f, £, <*f*;<k,n>>/<k,n>êNXN/, G> er en I;0-modellstruktur for L. Vi skal nå bruke "m(R)" for å betegne modellstrukturen i R. Videre skal vi skrive "*(R)", "D(R)", "f(R)", "£(R)", "*f*;<m,n>(R)" samt "G(R)" isteden for henholdsvis: "*", "D", "f", "£", "*f*;<m,n>", og "G". I stedet for "D(R)" skal vi også skrive "|R|". Vi lar "g(R)" betegne g, det vil si L-morfien i modellen R og ∏(R) står for valuasjonen i R, dvs. ∏ om R er som ovenfor.

Merk at vi alltid bruker "£" for å betegne det språket som inngår som en komponent i en modellstruktur, og at stor latinsk "L" betegner objektspråket, dvs. det språket som modellstrukturene er modeller for.

I stedet for å skrive "∏(R)(F) =T" skal vi ofte skrive R(F)= T. Og i stedet for å skrive "∏(R)(t)" vil skrivemåten "R(t)" bli benyttet.

Er L et språk og R en modell for L brukes L(R) for språket L utvidet med navn på alle elementene i D(R). Dette vil si at L(R) er det språket vi før har betegnet med "L(M)" eller "L(D(R))". Vi bruker "CFml(L(R))" for å betegne mengden av de lukkede formlene i L(R). Tilsvarende brukes CTerm(L(R)) for å betegne mengden av de lukkede termene i L(R).

Vi skal bruke "X;(R,L)" som standardforkortelse for g(R)"CFml(L(R)) om R er en modell for L. Videre skal vi bruke "Tr(R)" eller mer eksplisitt "Tr;L(R)" som forkortelse for:

g(R)"Mg(F: FêCFml(L(R)) & R(F)=1)

Igjen forutsettes det i denne forbindelse at R er en modell for L. Man ser fra denne definisjonen at Tr;L(R) Inkl CFml(£(R)). La oss også nevne at vi bruker R:= F, R:= F; (x,1,...,x;n)[a;1,...,a;n] der <a;1,...,a;n>ê|R|^n på den måten som ble forklart i forrige paragraf.

## §6 Om innholdet i resten av kapitlet.

I resten av dette kapitlet skal vi gi en mer intuitiv forklaring og motivasjon for de semantiske teoriene vi har introdusert i de foregående paragrafer. Jeg skal kort antyde innholdet i de neste avsnittene.[12]

I §7 forklarer vi først hva det er som er motivet for å kreve at G(R) skal være en-entydig i en I;0 modell R. De I;0-modeller der G(R) i modellstrukturen i modellen er en-entydig kalles *normale*. Vi forklarer dernest hva det er som er motivet bak selve begrepet I;0-

---

12 Det bør neves at de kommentarene vi har til de enkelte komponentene i en I;0(J;0)-modell R er av en helt uformell natur. Ingen av disse kommentarene hører med til selve den formelle teorien og ingen blir brukt i noen av bevisene for noen teoremer vi spesifiserer. En leser som derfor ikke finner dem treffende kan se helt bort fra dem. Det bør imidlertid bemerkes at logikken I;0 (se neste kapittel) ikke er uten visse ontologiske implikasjoner. F. eks. er den følgende setning et teorem:
(Ey)(U(y) & y=μ((Ax)(x=x))). Faktisk kan man for ethvert n≥2 bevise:
(Ex;1)...(Ex;n)(Konj/i,1,n/(U(x;i)) & Konj/1≤i≠j≤n/(x;i≠x;j)).
Dette innebærer at det finnes minst tellbart uendelig mange intensjoner. Man kan diskutere hvorvidt dette er en logisk sannhet og i hvilken utstrekning "U" f.eks. kan anses for å være et logisk ord. Det er vanskelig å se at dette spørsmålet er av noen dyptgående betydning. Hvis man skulle foretrekke en så snever definisjon av "logisk sannhet" at noen av teoremene eller aksiomene i I;0 ikke skulle kvalifisere som logiske sannheter er det ingen spesiell grunn til å protestere. Det som primært er av interesse er å bygge opp en konsistent og plausibel teori for slike uttrykk som "U", "t;<m,n>", "T;<m,n>", "μ" etc. Det er av underordnet betydning om denne teorien berettiget kan kalles en logisk teori eller ikke.

modell R. De intuitive idéene bak en J;0-modell er lette å forstå straks man skjønner det som motiverer I;0-modellene.

I;0-språkene, så vel som J;0-språkene, inneholder konstanter, singulære termer i snever forstand, funksjonssymboler og beskrivelser. I §8 studerer vi nøyere hvilke lover som gjelder for disse uttrykkene og hvordan de oppfører seg i intensjonale kontekster. I §9 tar vi opp skillet mellom strenge og svake intensjonale operatorer og diskuterer hvordan vi skal la valuasjonsreglene være i forbindelse med de strenge intensjonale operatorene. I §10 kommenterer vi hvordan setninger som inneholder kvantifikasjoner inn i intensjonale kontekster blir intepretert i vår semantikk. I §11 ser vi så på hvordan de modellklassene vi har definert kan innsnevres ved å legge forskjellige krav på de diverse operator funksjonene $f$;<m,n>(R) og funksjonen G(R) i en modell R og hvilken virkning dette har på klassen av de gyldige formlene. I denne forbindelse kan det være verdt å nevne at våre semantiske teorier er temmelig generelle. Så vidt vi kan se er de blandt de mest generelle som foreligger i litteraturen.

## §7 Normale I:0-modeller. Intensjoner. Uformell forklaring av de enkelte komponentene i en modell. Seminormale I:0-modeller. Gyldige formler.

Som allerede nevnt i §6 kaller vi en I;0-modellstruktur

m = <*,D,f, £, <$f$;<m,n>>/<m,n>êNXN/, G>

for et I;0-språk normal dersom det er slik G er en en-entydig funksjon. Er R en I;0 modell for L kaller vi R for normal hvis og bare hvis modellstrukturen m(R) er normal. Vi skal i det følgende, om ikke annet nevnes, alltid mene normale I;0-modellstrukturer og I;0-modeller når vi snakker om I;0-modeller og I;0-modellstrukturer.

La nå m = <*,D,f, £, <$f$;<m,n>>/<m,n>êNXN/, G> være en I;0-modellstruktur for L. Vi skal kommentere de enkelte komponentene i en slik struktur.

I en slik struktur representerer D mengden av alle individer i strukturen m. Dette innebærer at D er området vi kvantifiserer over, vårt "universe of discourse". Den aller første komponenten, *, i strukturen representerer hva man kanskje kunne kalle " den ikke-eksisterende tingen" siden ¬(*êD) og det er området av individer. Vi har innført hjelpestørrelsen * for å ha noe å tilordne tomme, referanseløse singulære termer som eksempelvis "Pegasus", "Broren til Apollon", "Den nuværende konge av Frankrike" etc. Er t en slik term kan man ikke tilordne den en referanse i D siden setningen (Ex)(x=t) da blir sann.

De fire siste komponentene i en modellstruktur spiller en helt vesentlig rolle i vår teori og er trukket inn for å sette oss i stand til å gi en tolkning av de intensjonale operatorene. Vi har på et tidligere tidspunkt delvis forsøkt å forklare hva vi mener med en "intensjon". Intensjoner er, slik vi oppfatter dem, den type entiteter som er objekter for de såkalte "propositional attitudes", dvs. de tingene man tror er tilfelle, vet er tilfelle, ser er tilfelle, er klar over at er tilfelle osv. Vi kom tidligere til den konklusjon at intensjoner er slike ting som eksem-pelvis at det finnes en gjenstand, at tall som er større en hundre er større en femti, at Venus er en stjerne, at den firkantede sirkel nå befinner seg på toppen av Glittertind. Kort sagt kan man si at slik vi tenker oss at alle uttrykk av typen "at –", der "–" tenkes fyllt ut med en deskriptiv setning som enten er sann eller falsk, refererer til intensjoner. Vi tok ikke tidligere definitivt stilling til noe identitetskriterium for intensjoner i denne forstand, men antok bare at logisk ekvivalente setninger kunne uttrykke distinkte intensjoner. Vi skal nå være mer eksplisitte på dette punkt og *anta at distinkte setninger i et I;0-språk alltid uttrykker distinkte intensjoner*. Merk at dette ikke gjelder for åpne setninger. Er for eksempel L et I;0-språk som inneholder det unære predikatet "x er en blå gjenstand", som vi heretter

forkorter med "Blå(x)", vil setningene "(Ex)Blå(x)" og "(Ex)(¬¬Blå(x))" uttrykke distinkte intensjoner. Er imidlertid x og y to distinkte objekter hentet fra et område D er intensjonen at x er blå forskjellig fra intensjonen at y er blå. Er derfor L et I;0-språk og D et område av objekter vil alle de lukkede formlene i L uttrykke intensjoner og to distinkte lukkede formler uttrykke distinkte intensjoner. Er videre F en åpen setning der de fri variablene som forekommer er henholdsvis x;1,...,x;n og har vi videre at det finnes en konstant a* i L for hvert individ aêD er det tanken at formelen F;(x;1,...,x;n[a;1*,....,a;n*] uttrykker en bestemt intensjon for hvert n-tuple <a;1,..,a;n>. Vi skal også anta at dersom <a;1,...,a;n>≠ <c;1,...,c;n>, der a;i,c;iêD for i=1,...,n, uttrykker F;(x;1,...,x;n)[a;1*,....,a;n*] en annen intensjon enn F;(x;1,...,x;n)[c;1*,....,c;n*]. På denne måten får vi fiksert mengden av alle de intensjonene som kan uttrykkes ved et språk/domene-par <L,D>. Omvendt kan man tenke seg gitt en mengde med intensjoner I som er slik at det finnes en struktur <L,D> der I er nøyaktig mengden av de intensjoner som kan uttrykkes av formlene i L når D tas til hjelp. Vi skal kalle slike intensjonsmengder for representerbare.

La oss nå vende til modellstrukturen m ovenfor. Vi tenker oss at i denne skal delstrukturen <D,f,£> nettopp sies å representere en slik representerbar mengde med intensjoner. Merk at det bare er de lukkede formlene i £ som representerer intensjoner. Det er bare dem vi vil gjøre bruk av i det følgende. Tenker man seg at for eksempel predikatet "Blå" er med blandt de ikke-logiske predikatene i £ vil formelen "(Ex)Blå(x)" representere intensjonen om at det finnes blå gjenstander. Setningen "¬(Ex)Blå(x)" vil representere intensjonen at det ikke finnes blå gjenstander osv. Er videre aêD vil formelen "Blå(f(a))" representere intensjonen om at objektet a er en blå gjenstand. Setningen "f(a) = f(a)" representerer intensjonen at a er identisk med seg selv.

Hvordan skal man så forstå funksjonen G? Når man begrenser seg til å betrakte normale I;0-modeller er G en en-entydig funksjon med CFml(£) som domene og verdiområdet inkludert i D. Formlene i CFml(£) representerer intensjoner. Det er derfor nærliggende å oppfatte G(F) når FêCFml(£) som den intensjonen formelen F representerer. G"CFml(£) vil da være klassen av alle de intensjonene som formlene i CFml(£) representerer. G((Ex)Blå(x)) vil i så fall være intensjonen om at det finnes blå gjenstander. G(Blå(f(a)), der aêD, vil være intensjonen at a er en blå gjenstand osv. Siden G er en-entydig vil naturligvis de to intensjonene G((Ex)Blå(x)) og G((Ex)¬¬Blå(x)) være forskjellige.

Når intensjonene er så fint individuert som de tenkes å være her skal vi tillate oss å kalle dem ultraintensjoner. Vi lar det da stå åpent om det finnes andre måter å individuere dem på. Dette er naturligvis et vanskelig spørsmål. Etter vår mening er imidlertid ultraintensjoner i den betydning vi her har innført de objektene som det er mest naturlig å oppfatte som gjenstander for tro, viten persepsjon etc.

De forskjellige operatorfunksjonene $f$;<m,n> i modellstrukturen m svarer til de intensjonale operatorene T;<m,n>. Er R en I;0-modell og <x;1,...,x;n>ê|R| skal vi kalle $f$;<m,n>(R)(x;1,...,x;n) for T;<m,n>-feltet til <x;1,...,x;n> i R. Er R en I;0-modell for vårt eksempel-språk i Kapittel I, §2, og er xê|R| kaller vi følgelig $f$;<1,0>(R)(x) for "vet at"-feltet til x i R. $f$;<1,1>(R)(x) vil være "tror at"-feltet til x i R, $f$;<1,2>(R)(x) vil være "ser at"-feltet. På lignende vis blir det for de andre intensjonale operatorene i dette språket.

Ser man ytterligere på en modell R for dette eksempel-språket skulle det være klart at $f$;<1,0>(R)(x), for xê|R|, representerer klassen av alle de inten-sjonene x vet er tilfelle. Tilsvarende vil $f$;<1,1>(R)(x) og $f$;<1,2>(R)(x) repre-sentere henholdsvis mengden av alle de intensjonene x tror er tilfelle og mengden av alle de intensjonene x ser er tilfelle. Tilsvarende for de andre operatorene i dette språket. Er ((Ex)Blå(x)) ê$f$;<1,1>(R)(x) innebærer dette at x tror at det finnes blå gjenstander. Tilsvarende innebærer (f(a)=f(a))ê$f$;<1,1>(R)(x) der aê|R| at x tror at a er identisk med seg selv. Det skulle ikke være spesielt vanskelig å fortsette denne rekken med eksempler.

La oss nå betrakte en I;0-modell R=<m,g,∏> for et I;0-språk L og ikke bare modellstrukturen i en slik modell. Man ser at det som kommer i tillegg er L-morfien g og valuasjonsfunksjonen ∏. g kan oppfattes som en funksjon som tilordner formlene i objektspråket intensjoner siden den avbilder L(R) inn i £(R), dvs. mer nøyaktig, tilordner enhver lukket formel F i L(R) en lukket formel i £(R). g(R)'F kan derfor sies å representere den intensjonen formelen F uttrykker. La oss dernest se på valuasjonen ∏. Som man ser tilordner denne predikatene, funksjonssymbolene og konstantene ekstensjoner i |R| på vanlig måte. Man kan i denne sammenheng konsultere Definisjon 3.1.1, klausul (2), (5) og (6). Videre ser man at valuasjonsreglen for allkvantoren er den helt tradisjonelle. En setning av formen "(Ax)F" er sann i en modell R hvis og bare hvis F;x[i] er sann for ethvert navn i i L(R) , mao. hvis og bare hvis F;x[y] er sann uansett hvilket objekt i D man tilordner variabeltegnet y. Valuasjonsreglene for de setningslogiske konnektivene er også som vanlig og skulle neppe kreve noen utstrakte kommentarer. Vi venter med å kommentere valuasjonsreglene for de singulære termene og beskrivelsesoperatoren til neste avsnitt.

La oss se på valuasjonsreglen for de diverse intensjonale operatorene T;<m,n>. Hvis vi tenker oss at R er en I;0-modell for vårt eksempel-språk i Kapittel I, §2, ser man at man f.eks. har:

(1) ∏(R)(T;<1,0>(t,F) =1 <–> g(R)(F)ê(*f*;<m,n>(∏(R)(t)))

Dette er som det bør være siden det (1) sier er at en setning av typen "t vet at F" er sann hvis og bare hvis den setningen som representerer intensjonen F uttrykker, g(R)(F), er med blandt alle de setningene som representerer det ∏(R)(t) vet er tilfelle. Men dette er tilfelle hvis og bare hvis t vet at F. Tilsvarende betrakt-ninger kan gjøres for de andre intensjonale operatorene i eksempel-språket.
Alt dette synes å vise at valuasjonreglen for operasjonene T;<m,n> er rimelig.

∏(R) tilordner predikatkonstanten U i L mengden Rgn(G(R)). Dette er i overensstemmelse med det man skulle forvente siden verdiområdet til G(R) nettopp representerer alle intensjonene i modellen. Man ser også at ∏(R) tilordner ekstensjon til de forskjellige predikatkonstantene t;<m,n> på en måte man skulle forvente:

(2) ∏(R)(t;<m,n>) =
Mg(<x;1,...,x;n,y>: yêG(R)"(*f*;<m,n>(R)(x;1,...,x;m)) &
x;1,...,x;m,yêD(R))

Ser man i denne forbindelse på det eksempel-språket som vi tidligere har betraktet og ser spesielt på det tilfelle at <m,n> = <1,0> skulle det være klart at G(R)"(*f*;<1,0>(R)(x)) representerer mengden av de ultraintensjonene x vet er tilfelle. Er da yêG(R)"(*f*;<1,0>(R)(x)) innebærer dette at y er noe x vet er tilfelle. Tilsvarende hvis man ser på det tilfelle at <m,n>=<0,0>. Siden T;<0,0> er konstruksjonen "Det er logisk nødvendig at – " følger det at G(R)"(*f*;<0,0>(R)) representerer mengden av de ultraintensjonene som det er logisk nødvendig at er tilfelle. Er da yêG(R)"(*f*;<0,0>(R)) innebærer dette at y er tilfelle med logisk nødvendighet. For de andre intensjonale operatorene i vårt eksempel-språk i Kapittel I, §2: T;<1,1> – T;<1,10> er situasjonen nøyaktig den samme. Man ser altså at valuasjonsfunksjonen ∏ tilordner de diverse predikatkonstantene t;<m,n> ekstensjon på en måte som virker fornuftig.

For utsagnsabstrakter μ(F) er valuasjonsreglen slik:

(3) ∏(R)(μ(F)) = G(R)(g(R)(F)) forutsatt at FêCFml(L(R)).

Dette er som det bør være siden g(R)(F) er den setningen i £(R) som representerer den intensjonen som F uttrykker og G(R)(g(R)(F)) derfor kan sies å være denne intensjonen.

Slik vi har fastlagt valuasjonen ∏ er det lett å se at følgende skjemaer er gyldige:

(4) T;<m,n>(x;1,...,x;n,F) <–> t;<m,n>(x;1,...,x;,μ(F))
(5) U(μ(F))
(6) t;<m,n>(x;1,...,x;n,y) –> U(y)

Vi nevnte disse skjemaene i Kapittel I, §2. Vi ser nå at de er gyldige i alle normale I;0-modeller. Merk at (4) er gyldig i de normale I;0-modellene. Dette skjemaet er imidlertid ikke gyldig i alle I;0-modellene. Kondisjonalen mot høyre i (4) er derimot gyldig i enhver I;0-modell. (5) og (6) er også gyldige i enhver I;0-modell.

Når vi skriver F;(x;1,...,x;n)[t;1,...,t;n] skal vi forutsette at x;1,...,x;n er distinkte variabeltegn, at alle faktisk forkommer i F og at t;1,...,t;n kan substitueres for henholdsvis x;1,...,x;n. Vi sier at F er en substitusjonsinstans av G hvis og bare hvis det finnes en formel H, variabeltegn x;1,...,x;n og enkle termer a;1,..,a;n, b;1,...,b;n slik at:

F = H;(x;1,...,x;n)[a;1,...,a;n] og
G = H;(x;1,...,x;n)[b;1,...,b;n]

Nå har man at skjemaet:

(7) μ(F) ≠ μ(G)

er gyldig i alle normale I;0-modeller om F ikke er en substitusjonsinstans av G. Videre har man at det følgende skjema er gyldig i alle I;0-modeller:

(8) μ(H;(x;1,...,x;n)[a;1,...,a;n]) = μ(H;(x;1,...,x;n)[b;1,...,b;n] –>
a;i = b;i (i=1,...,n)

Man må her forutsette at a;1,...a;n,b;1,...,b;n er enkle termer. Merk at verken (7) eller (8) er gyldige i alle I;0-modeller.

En *seminormal I;0-modell* er en I;0-modell R for L som oppfyller de følgende to krav:

(9) G(R)"X;(R,L)Ω G(R)"(CFml(£(R)) – X;(R,L))=ø
(10) G(R) Ω(|R]X X;(R,L) er en korrelasjon.

Man ser at de normale I;0-modellene er seminormale siden kravene (9) og (10) er oppfylt av alle normale modeller. Det omvendte gjelder imidlertid ikke. I en seminormal I;0-modell R behøver ikke G(R) være noen korrelasjon. Det er imidlertid viktig å merke seg at skjemaene (4) – (8) alle er gyldige i klassen av seminormale I;0-modeller.

Er R en I;0-modell representerer X;(R,L) mengden av alle de intensjonene som kan uttrykkes i objektspråket L. CFml(£(R)) – X;(R,L) representerer intensjoner i R som ikke kan uttrykkes i L. I en seminormal modell R kan altså flere setninger i CFml(£(R)) – X;(R,L) representere en og samme intensjon. Er f.eks. F,H ê(CFml(£(R)) – X;(R,L)) og er G(R)‘F = G(R)‘H så representerer de den samme intensjonen. Når det gjelder de intensjonene som kan uttrykkes i objektspråket er det imidlertid ingen forskjell på de normale og de seminormale I;0-modellene. Vi skal arbeide med seminormale I;0-modeller når vi kommer til våre kompletthetsteoremer.

## §8 Kommentarer til de forskjellige kategorier av uttrykk i intensjonale språk. Konstanter, funksjonssymboler, singulære termer, beskrivelser. Gyldige formler.

I et I;0-språk har vi de følgende kategorier av uttrykk: (a) konstanter, (b) singulære termer i

snever forstand, (c) funksjonssymboler, (d) bestemte beskrivelser. I dette avsnittet skal vi s på hvilke lover som er gyldige for disse uttrykkene.

På mange måter har konstantene en spesiell stilling i vår teori siden de adlyder lover som ikke de andre termene gjør. For det første er de "rigide" i den forstand at dersom en formel av typen e1 = e2 er sann i en modell R så kan e2 erstattes for en eller flere forekomster av e1 i en formel F slik at man får som resultat en formel G som er gyldig i R hvis og bare hvis F er gyldig i R. Grovt sagt kan altså koreferensielle singulære termer substitueres for hverandre i enhver setning salva veritate. Denne egenskapen manifesterer seg klart ved at de følgende to skjemaer er gyldige:

(1) (Ax)F –> F;x[e]
(2) e1 = e2 –> (F –> F')

der F' er som F unntatt muligens ved å ha en forekomst av konstanten e2 på et eller flere steder hvor F har en forekomst av e1. Et spesialtilfelle av (2) er:

(3) e1 = e2 –> (T;<m,n>(x;1,...,x;n,F;y[e1]) –> T;<m,n>(x;1,...,x;n,F;y[e2])

(3) er gyldig. Man ser derfor at vi kan substituere koreferensielle konstanter for hverandre også innenfor området til intensjonale operatorer. Det kan synes tvilsomt om det finnes noen navnlignende eller termlignende uttrykk i vanlig språk som oppfører seg på samme måte som våre konstanter. Vi har imidlertid innført dem av tekniske grunner siden de er meget hendige når vi formulerer semantikken ved å bruke navn på objektene i det domene vi kvantifiserer over ved formuleringen av valuasjonsreglene for kvantorene. Teoretisk sett er e imidlertid overflødige. Vi kunne ha formulert den semantiske teorien uten å bruke navn og våre konstanter ville da ha vært unødvendige. Man kan notere at

(4) (Ex)(x=e)

er gyldig om e er en konstant i språket. Man bør også bemerke at det er en bestemt sammenheng mellom g(r) og∏(R) i en modell R når det gjelder konstantene, i det vi har stipulert at:

(5) ∏(R)(e) = f(R);-1(g(R)(e))

Det er denne stipulasjonen sammen med den at g(R)(i) = f(R)(∏(R)(i)) når i er et navn i L(R) som gjør (2) gyldig.

I forbindelse med (2) må det også nevnes at skjemaet:

(+) (Ax)(Ay)(x=y –>(F –> F'))

der det forutsettes at F' er som F unntatt muligens ved å ha en fri forekomst av variabeltegnet y på et eller flere steder hvor F har en fri forekomst av x, er gyldig i enhver I;0-modell. Forfatteren føler seg dypt overbevist om at man må ha denne loven i intensjonal logikk hvis man vil tolke identitetstegnet "=" som identitet og ikke som en annen relasjon.

I motsetning til konstantene kan de singulære termene i snever forstand være "referanseløse". Vi har stipulert at ∏(R)(s)êDU{*} om s er en singulær term i snever forstand og D er domenet i modellen R. Er ∏(R)(s)=* er s uten referanse, er ∏(R)(s) på den annen side et element i D kan den sies å ha en referanse. Det følger fra dette at R(¬(Ex)(x=s)) =1 om ∏(R)(s)=* siden det da ikke kan finnes noe navn i i L(R) slik at R(i) = ∏(R)(s).

Merk at de følgende to formler er gyldige i enhver I;0-modell:

(6) ¬(Ex)(x=s) –> s≠s
(7) ¬(Ex)(x = s1) & ¬(Ex)(x = s2). –> ¬(s1=s2)

Disse formlene er gyldige fordi vi har stipulert i definisjonen av en modell at ∏(R)(=) = Mg(<x,y>: x=y & x,yêD) og derfor bare kan ha at ∏(R)(s1=s2) =1 om både ∏(R)(s1) og ∏(R)(s2) er elementer i D. Dette vil selvfølgelig ikke være tilfelle om en av dem er *.

Konstantene kan brukes ved instansiering av universelle formler. De singulære termene er ikke slik. Vi har imidlertid at:

(8) (Ax)F & (Ex)(x=s) –> F;x[s]

er gyldig i klassen av I;0-modeller forutsatt at variabeltegnet x ikke forekommer fritt innenfor området til noen intensjonal operator i F. Her er forbeholdet nødvendig. Vi kan ikke selv om den singulære termen s har referanse slutte fra noen formel av f.eks. typen T;<m,n>(x;1,...,x;n,P(y)) til en formel av den følgende type: T;<m,n>(x;1,...,x;n,P(s)). Man ser forholdsvis lett hvorfor det er slik. La R være en modell for L. Man kan da godt ha at:
g(R)(P)(f(R)(x)) ê*f*;<m,n>(R)(a;1,...,a;n) der a;1,....,a;n,x ê|R|, men ikke at g(R)(P) (g(R)(s))ê *f*;<m,n>(R)(a;1,...,a;n). F.eks vil dette være tilfelle om man har at *f*;<m,n>(R)(a;1,...,a;n) = Mg(g(R)(P)(f(R)(x)): xê|R]). Da vil åpenbart g(R)(Ps) ikke være med i *f*;<m,n>(R)(a;1,...,a;n). Har man ∏(R)(e;i) = a;i for i=1,...,n vil man derfor i denne modellen ha R((Ay)T;<m,n>(e;1,...,e;n,P(y))) =1, mens man på den annen side har R(T;<m,n>(e;1,...,e;n,P(s))) =0.

Man kan formulere en generell versjon av (8) som er gyldig for alle termer t, hva enten det dreier seg om snevre singulære termer eller andre termer:

(9) (Ax)F & (Ey)(y=t) –> F;x[t] der man forutsetter at (i) x ikke forkommer fri innenfor området til noen intensjonal operator og (ii) y forekommer ikke fri i t

Som ovenfor forklart kan man finne moteksempler om betingelsen (i) ikke er oppfylt. Det er også lett å finne moteksempler om det andre forbeholdet ikke er oppfylt.

I en I;0-modell R blir et n-ært funksjonssymbol f tilordnet en n-ær funksjon der domenet er D^n og verdiområdet er inkludert i D. Man ser at valuasjonsreglen for termer av typen f(t;1,...,t;n) er slik at om alle termene t;1,...,t;n har referanse så har f(t;1,...,t;n) det også. Da har man:

∏(R)(f(t;1,...,t;n)) = ∏(R)(f)(∏(R)(t;1),..., ∏(R)(t;n))

I det tilfelle at minst en av termene t;1,...,t;n mangler referanse , ie. om ∏(R)(t;i)=* for noe iê{1,...,n}, er ∏(R)(f(t;1,...,t;n))=*. Denne egenskap ved valuasjons-funksjonen ∏ er gjenspeilet i syntaksen ved at det følgende skjema er gyldig:

(10) (Ex)(x= f(t;1,...,t;n)) <–> (Ex)(x=t;1) &.... & (Ex)(x = t;n)

i det man forutsetter at variabeltegnet x ikke forekommer fritt i noen av termene t;1,...,t;n. Man ser også lett at det følgende skjema er gyldig:

(11) t;1 = r;1 & ... & t;n =r;n –> ( f(t;1,...,t;n) = f(r;1,...,r;n))

Her er det naturligvis forutsatt at t;1,...,t;n,r;1,...,r;n er termer i L. Beviset for at (11) er gyldig skulle neppe kreve noen kommentarer.

I denne forbindelse er det også verdt å nevne at de følgende to skjemaer også er gyldige:

(12) t;1 = r;1& ... & t;m = r;m –> (P(t;1,...,t;m) <–> P(r;1,...,r;m))

forutsatt at t;1,...,t;m,r;1,...,r;m er termer i L og P et m-ært predikat i L (m≥1), og

(13) t;1 = r;1& ... & t;m = r;m –>
(T;<m,n>(t;1,...,t;m,F) <–> T;<m,n>(r;1,...,r;m,F)

For la R være en vilkårlig I;0-modell. Har man da at R(t;i = r;i)=1 for i=1,..,n følger det at ∏(R)(t;i) = ∏(R)(r;i) og at såvel ∏(R)(t;i) som ∏(R)(r;i) er elementer i domenet |R| i kraft av valuasjonsreglen for identitetstegnet. Men da må man åpenbart ha:

R(P(t;1,....,t;n)) = 1 <–> <∏(R)(t;1),....,∏(R)(t;n)> ê∏(R)(P)
<–> <∏(R)(r;1),....,∏(R)(r;n)> ê∏(R)(P)
<–> R(P(r;1,....,r;n)) = 1

Dessuten skulle det også være klart at:

R(T;<m,n>(t;1,...,t;m,F))=1 <–> g(R)(F)ê*f*;<m,n>(R)(∏(R)(t;1),....,∏(R)(t;n))
<–> g(R)(F)ê*f*;<m,n>(R)(∏(R)(r;1),....,∏(R)(r;n))
<–> R(T;<m,n>(r;1,...,r;m,F))=1

Dette skulle være nok for å vise at (12) og (13) er gyldige.

Ved hjelp av (12) og (13) kan man også vise at det følgende skjema er gyldig:

(14) t;1 = r;1 –> (F –> F') forutsatt at F' er som F unntatt muligens ved å inneholde en fri forekomst av termen r;1 på et eller flere steder hvor F har en fri forekomst av t;1 som ikke forekommer innenfor området til noen intensjonal operator.[13]

---

[13] Som man ser er den følgende formel gyldig: (1) (Ax)(Ay)(x=y –>. F(x) –> F(y)), men ikke (2) t=t' –>. F(t) –> F(t') der t og t' er termer . De intensjonale operatorene er derfor "referensielt uigjenomsiktige" i den betydnig som er definert i Føllesdal [1]. (Definisjonen er hentet fra Quine, se Quine [3], [5]). I Føllesdal [1], [2] blir det hevdet at (a) man bare kan kvantifisere med hensyn på steder som er referensielt gjennonsiktige. Føllesdal nevner to kriterier på når et sted i en setning er referensielt gjennomsiktig: (b) Koreferensielle singulære termer kan substitueres for hverandre salva veritate på et slikt sted. (c) Kvantifikasjon med hensyn på et slikt sted er tillatt. Siden intensjonale operatorer åpenbart er referensielt uigjennomsiktige om man bruker (b) som kriterium og (d) regner slike uttrykk som "Aftenstjernen" og "Morgenstjernen" som singulære termer, følger det, om man antar at (a) er sann at man ikke kan kvatifisere inn i intensjonale kontekster. Vil man derfor kvantifisere inn i slike kontekster må man følgelig vise at en eller flere av premissene i argumentet ovenfor er feilaktige. Quine synes ikke å finne noen grunn til å dra i tvil noen av premissene og slutter følgelig at kvantifikasjon inn i intensjonale kontekster er umulig. Føllesdal på den annen side ønsker å kvantifisere inn i slike kontekster (Se Føllesdal [2] for grunner). Siden han ikke ser noen grunn til å betvile til å betvile (a), (b) og (c) følger det at den premissen som han gir opp er (d), nemlig at "Morgenstjernen" og "Aftenstjernen" og lignende uttrykk er singulære termer. Mer generelt må man la være å se på alle slike navnlignende uttrykk som er koreferensielle, og som ikke kan substitueres for hverandre salva veritate i en setning når de forekommer på et sted der (c) holder, for å være singulære termer. Formodetlig blir da bare variablene tilbake som de eneste navnlignende uttrykk vi virkelig kan anse for å være singulære termer. Se Føllesdal [1], [2], [3] og [6]. I de systemene som blir fremstilt her er det ikke lagt noen restriksjoner på klassen av singulære termer og vi tillater samtidig kvantifikasjon inn i intensjonale kontekster. Siden "referensielt gjennomsiktig sted" er en teknisk term og (b) virker som en definisjon, sier tese (a) det samme som at man bare kan kvantifisere med hensyn på steder der man kan substituere singulære termer for hverandre salva veritate. I stedet for å betvile (d) betviler vi (a) når (b) legges til grunn som definisjon av "referensielt uigjennomsiktig sted". Merk forøvrig at tese (a) blir komplett triviell om (c) brukes som definisjon av "referensielt uigjennomsiktig sted". Brukes denne definisjonen sier (a) bare at kvantifikasjon på et bestemt sted er tillatt bare hvis kvantifikasjon med hensyn på dette sted er tillatt. Hvis vår semantikk ikke bare er formelt sett i orden, men også kan brukes til å gi en "genuin" tolkning av språk av den typen vi har betraktet følger det at (a)

Kort sagt kan man si at koreferensielle termer kan substitueres fritt for hverandre i alle ekstensjonale kontekster. Merk her at om termen t forekommer på et av variabelstedene i en formel av typen "T;<m,n>(x;1,...,x;m,F)" så sier vi at den forekommer i en ekstensjonal kontekst. I denne forbindelse må det også nevnes at de følgende to skjemaer er gyldige:

(15) $P(t;1,...,t;n) \rightarrow (Ex)(x=t;i)$ der i= 1,...,n

forutsatt at x ikke forekommer fri i t;i. Dessuten:

(16) $T;<m,n>(t;1,...,t;m,F) \rightarrow (Ex)(x=t;i)$ der i=1,...,n

med det samme forbehold.

I alle våre språk har vi inkludert en beskrivelsesoperator i ved hjelp av hvilken vi kan danne bestemte beskrivelser på vanlig måte. Som man ser av valuasjonsreglen for uttrykk av typen (ix)F er et slikt uten referanse i en modell R om F enten ikke er oppfylt av noe objekt i |R| eller av to eller flere. Er F oppfylt av nøyaktig et og bare et objekt a i |R| så er $\prod(R)((ix)F) = a$. Av denne grunn er formelen $(Ey)(y = (ix)F)$ ikke i sin alminnelig gyldig.

En lov som er ubetinget gyldig for beskrivelser er den følgende:

(17) $(Ay)(y = (ix)F \leftrightarrow (Ax)(F \leftrightarrow x=y)$

forutsatt at y ikke forekommer fri i F. Beviset for at denne er gyldig skulle ikke by på spesielle problemer. Merk at x her godt kan forekomme fri innenfor området til til en intensjonal operator.

Som ved de singulære termene er det ikke generelt mulig å instansiere med hensyn på bestemte beskrivelser, unntatt i de tilfellene hvor de forkommer i ekstensjonale kontekster og i tillegg har en referanse. Det følgende skjema er derfor gyldig:

(18) $(Ez)(z= (ix)G) \rightarrow . F;y[(ix)G)] \leftrightarrow (Ez)(F;y[z] \& (Ax)(G \leftrightarrow x=z))$

forutsatt (i) at z ikke forekommer fri i G eller F, (ii) y ikke forekommer fri innenfor området til noen intensjonal operator.

Skjemaet (18) viser at bestemte beskrivelser oppfører seg som de skal i ekstensjonale kontekster. Er P et unært predikat er den følgende formel et spesialtilfelle av (18):

(19) $(Ez)(z= (ix)G) \rightarrow . P((ix)G)) \leftrightarrow (Ez)(P(z) \& (Ax)(G \leftrightarrow x=z))$

Det må her forutsetter at z ikke forekommer fri i G.[14]

---

ikke kan være korrekt. Vi opponerer derfor mot i det minste en påstand i arbeidene nevnt ovenfor av Quine og Føllesdal. Det følger også at en løsning som går ut på å begrense mengden av singulære termer slik at "Morgenstjernen" f.eks. ikke lenger regnes som en singulær term er helt uakseptabel. I en anmeldelse av Føllesdal [6] har også Hintikka kritisert denne utveien. (Se Hintikka [6]). Til tross for semantikken vi har presentert ovenfor viser at det ikke er noen rent formelle hidringer for å kvantifisere inn i intensjonale kontekster forekommer det meg imidlertid som om problemet likevel ikke er fullstendig avklart. Fremdeles kan man stille spørsmål om setninger av typen $(Ex)T;<1,0>(a,F(x))$ har noen klar mening, vitenskapelig eller empirisk, i nærvær av sannheter som $T;<1,0>(a, F(t))$ og $\neg T;<1.0>(a,F(s))$ der t og s forutsettes å være to singulære termer med samme referanse. ("T;<1,0>" kan f.eks. være "– tror at –". La meg avslutte med følgende bemerkninger. I Quine [2], [3], [4], [5] forekommer en del andre innvendiger mot kvantifikasjon inn i intensjonale kontekster. e er oppsummert i Føllesdal [1], Ch II, pp 34–42. Det forekommer meg imidlertid som om alle disse innvendingene kan imøtegås og at de er imøtegått i vår teori.

[14] Det er mulig innenfor vår ramme å behandle utsagnsabstraksjonsoperatoren μ på en måte som gjør det mer

## §9 Strenge og svake intensjonale operatorer.

Så langt har vi ikke omtalt strenge intensjonale operatorer. Vi sier at en intensjonal operator er streng hvis og bare hvis skjemaet:

(1) T;<m,n>(x;1,...,x;m,F) –> F

er gyldig. Et klart eksempel på en streng intensjonal operator i denne forstand er konstruksjonen "– vet at –". Hvis en person vet at noe er tilfelle er dette tilfelle. Man kan for eksempel ikke vite at jorden er rund dersom det ikke faktisk er slik at den er det.

Er nå T;<m,n> en streng intensjonal operator må man for å få (1) gyldig i alle I;0-modeller kreve at:

(2) $f$;<m,n>(R)(x;1,...,x;n)ΩX;(R,L) Inkl Tr;L(R)

for enhver I;0-modell R for L, der <x;1,...,x;n>ê|R|^n. Man må også kreve dette for J;0-modellenes vedkommende. Det skulle være lett å se at (1) er gyldig under disse omstendigheter om <m,n> er indeksen til en streng intensjonal operator. For anta

(3) T;<m,n>(i;1,...,i;m,F') –> F'

er en R-instans av (i) for en vilkårlig I;0-modell R. Anta videre at R(T;<m,n>(i;1,...,i;m,F') =1. Da har man ved hjelp av valuasjonsreglen for operatorer av type T;<m,n> at:

g(R)(F')ê$f$;<m,n>(R)(R(i;1),...,R(i;m)). Siden g(F')êX;(R,L) og <m,n> er indeksen til en streng intensjonal operator må man ifølge (2) ha at g(F')êTr;L(R). Dette impliserer i lys av definisjonen av Tr;L(R) at det finnes GêCFml(L(R)) slik at g(F')=g(G) og at R(G)=1. Det følger herav at R(F') =1. Men siden R var en vilkårlig en vilkårlig modell for L og (3) en vilkårlig R-instans av (3) følger at (1) er gyldig i enhver I;0-modell.

Det som motiverer (2) skulle ikke være vanskelig å fatte. Ser man på en konkret intensjonal operator av den strenge typen, f.eks. "– vet at –", kan man si at kravet (2) innebærer at de intensjonene som x vet er tilfelle, representert ved $f$;<1,0>(R)(x) (der xê|R|) må være sanne. De setningene i en I;0-modell R som representerer intensjoner er CFml(£(R)). En slik setning FêCfml(£(R)) kan da sies å representere noe som er tilfelle , sant, om FêTr;L(R). Dette ser man fra definisjonen av Tr;L(R) som nettopp er alle de formlene i CFml(L(R)) som er sanne i R.

Bruker man denne fremgangsmåten for de strenge intensjonale operatorene er vi ikke

---

naturlig å se på referansen til uttrykk av typen "μ(F)" som "propositions" i en mer vanlig betydning. I stedet for å hevde at G(R) i enhver I;0-modell R er en-entydig kunne man i steden kreve at G(R)(F) = GR(H) der F,HêCFml(£(R)) om F i en eller annen forstand var ekvivalent med H. Man kunne f.eks. kreve at (1) om F,HêCFml(£(R)) og (F<–>H)êTh(I;0*,£(R)) så er G(R)(F)=G(R)(H). Her er I;0* systemet I;0 beskrevet i Kapittel III, minus aksiomet A18. Dette ville, noe man lett ser, gjøre formelen μ(F)=μ(H) gyldig om (F<–>G)êTh(I;0*,L). Dette ville gi oss en μ-operator som er forskjellig fra den μ-operatoren vi allerede har betraktet siden andre lover nå gjelder. I denne forbindelse kan det nevnes at om vi krevet av enhver I;0-modell R at (2) om F,HêCFml(£(R)), FêX;(R,L), G(R)(F) = G(R)(H) og Fê$f$;<m,n>(R)(x;1,...,x;m) så Hê$f$;<m,n>(R)(x;1,...,x;m), ville skjemet T;<m,n>(x;1,...,x;n,F) <–> t;<m,n>(x;1,...,x;n,μ(F)). Krever man både at (1) og (2) skal holde for enhver I;0-modell R ser man lett at

T;<m,n>(x;1,...,x;n,F) <–> T;<m,n>(x;1,...,x;n,H) er gyldig om (F<–>H)êTh(I;0*,L).

Ved å legge forskjellige krav av denne typen på I;0-modellene kan man lett gi tolkninger av systemer som inneholder slutningsreglen :– (F<–> G) –> :– (μ(F) = μ(G)). Man skulle også kunne vise fullstendighet for slike systemer.

alltid i stand til å spesifisere modellene, siden vi må forsikre oss om at (2) holder og dette ikke alltid er like lett å vise. En annen fremgangsmåte ville derfor være denne: I stedet for å legge noen restriksjoner på $f$;<m,n>(R) når <m,n> er indeksen til en streng intensjonal operator, forandrer vi heller valuasjonsreglen for disse operatorene slik at den nå blir slik:

(5) R(T;<m,n>(t;1,...,t;n,F)) =1 <–>
(g(R)(F)ê$f$;<m,n>(R)(R(t;1),...,R(t;n)) & R(F) =1)

Dette vil naturligvis gjøre skjemaet (1) gyldig for de strenge intensjonale operatorene vedkommende. Men det gjør også følgende skjema gyldig:

(6) T;<m,n>(x;1,...,x;m,F) <–> t;<m,n>(x;1,...,x;n,μ(F)) & F

Nå er det ikke så urimelig. Det som er mer betenkelig er at ingen av de følgende to formler blir gyldige når <m,n> er indeksen til en streng intensjonal operator:

(7) T;<m,n>(x;1,...,x;n,F) <–> t;<m,n>(x;1,...,x;n,μ(F))
(8) t;<m,n>(x;1,...,x;n,μ(F)) –> F

Det er imidlertid klart at vi ønsker at begge disse skjemaene skal være gyldige. Intuitivt er derfor ikke denne fremgangsmåten å foretrekke fremfor den første. På den annen side er det nå fullt mulig for oss å spesifisere vilkårlige modeller siden modellstrukturens avhengighet av ∏(R) som ligger implisitt i kravet (2) nå er helt opphevet. Vi skal imidlertid i resten av dette arbeidet forutsette den første fremgangsmåten i forbindelse med de strenge intensjonale operatorene ved I;0-modellene om ikke noe annet uttrykkelig sies.

Når det gjelder J;0-modellene spiller det mindre rolle hvorvidt vi bruker den ene eller den andre fremgangsmåten ved de strenge intensjonale operatorene. Vi kan enten forandre valuasjonsfunksjonen som ved (5) eller vi kan legge kravet (2) på operatorfunksjonen $f$;<m,n>(R) om <m,n> er indeksen til en streng intensjonal operator. Den siste fremgangsmåten er den intuitivt mest naturlige når man tenker på hvordan vi har forsøkt å motivere våre modeller, men til gjengjeld blir det vanskeligere å spesifisere modellene i visse tilfelle. Spesielt blir dette merkbart når vi – som vi senere skal gjøre – legger kompliserte krav på funksjonene $f$;<m,n>(R). Ved den første fremgangsmåten er denne vanskeligheten ikke til stede.

Vi kaller de J;0-modellene der de strenge intensjonale operatorene har vanlig valuasjon, dvs. der ∏(R) er definert som i §3.1 (Se klausul (14) i Definisjon 3.1.1), men der kravet (2) ovenfor er pålagt $f$;<m,n>(R) om <m,n> er indeksen til en streng intensjonal operator for *J;0-modeller av det andre slaget*. De J:0-modeller der vi lar valuasjonsfunksjonen være som ved (5) for de strenge intensjonale operatorene kaller vi for *J;0-modeller av det første slaget.*

## §10 Kvantifikasjon inn i intensjonale kontekster.

Våre språk inneholder formler hvor det kan forekomme kvantorer utenfor området til en intensjonal operator som binder forekomster av fri variabler innenfor området til operatoren. Det skulle ikke være vanskelig å se hvordan slike formler blir intepretert i vår semantikk. La oss ta utgangspunkt i eksempel-språket fra Kapittel I, §2 og se på formelen (Ex)T;<1,0>(e,Blå(x)). Denne er som man umiddelbart ser sann i en I;0-modell R hvis og bare hvis det finnes et objekt aê|R| slik at g(R)(Blå)(f(R)(a)) er et element i $f$;<1,0>(R)(R(e)). Dette er naturligvis som det skal være. Slik vi har definert valuasjonen ∏ kommer også alle

de vanlige lovene for kvantorene ut som gyldige. Vi har derfor ikke funnet det nødvendig å modifisere kvantifikasjonsteorien for å bli i stand til å tolke de intensjonale operatorene.

Vi har brukt *navn* ved formuleringen av valuasjonsreglene for formler av typen (Ax)F og(Ex)F. Man kan neppe se i dette noen evidens for at vi tillegger disse kvantorene noen annen betydning enn den vanlige. Vi gir dem f.eks. ikke noen substitusjonell tolkning. I overensstemmelse med de valuasjonsregler vi har fastsatt kommer en setning av typen "(Ex) (x er en blå gjenstand)" ut som sann nøyaktig når det finnes et navn i slik at "i er en blå gjenstand" er sann. Men siden vi antar at hvert objekt i universet har et navn og dessuten at navnrelasjonen, korrelasjonen mellom objektene i universet og navnene, er en-entydig følger det fra dette at setningen "(Ex)(x er en blå gjenstand)" er sann hvis og bare hvis det finnes et objekt i universet som er en blå gjenstand. Men dette synes å gjenspeile nøyaktig den betydning man vanligvis tillegger eksistens-kvantoren.

I denne forbindelse kan det bemerkes at det er mulig å reformulere vår semantikk uten å bruke navn i det hele tatt. I stedet for å definere en valuasjonsfunksjon slik som i Definisjon 3.3.1 i §3.1 kunne man ha gitt en rekursiv definisjon av uttrykket "v tilfredsstiller F i modellstrukturen m" hvor v er en tellbart uendelig sekvens av elementer i D og F en formel. Dette kunne ha skjedd etter forbilde av fremgangsmåten i Tarski [1]. Valuasjonen for formler av typen (Ex)F og (Ax)F ville da ha vært den rent tradisjonelle. Vi har imidlertid foretrukket å arbeide med navn siden dette teknisk sett er enklere, mer hendig og fordi vi ikke har sett noen betydningsfull forskjell mellom de to alternativene.

## §11 Krav som kan pålegges modellene.

Så langt har vi ikke betraktet muligheten av å legge noen restriksjoner på funksjonene $f$;<m,n>(R) i en I;0-modell R. Dette innebærer at vi ikke kan fremvise noen spesielle lover for de intensjonale operatorene, f.eks. er ingen formel av typen:

(1) T;<m,n>(x;1,...,x;n,F&G) –> T;<m,n>(x;1,...,x;n,F)

gyldig i klassen av alle I;0-modeller. Men (1) vil være gyldig i klassen dersom vi krever at dersom (F&G)ê$f$;<m,n>(R)(x;1,...,x;n) så er Fê$f$;<m,n>(R)(x;1,...,x;n) forutsatt at x;1,....,x;nê|R| og F,GêCFml(£(R)).

Man ser at det er en korrespondanse mellom krav man kan legge på de diverse funksjonene $f$;<m,n>(R) og de formlene som er gyldige i de modellene som oppfyller kravene. Ser man f.eks. på de I;0-modeller R der man krever at:

(2) (¬¬F)ê$f$;<m,n>(R)(x;1,...,x;n) –> Fê$f$;<m,n>(R)(x;1,...,x;n)

der FêCFml(£(R)) og x;1,...,x;nê|R|; iaktar man at formelen:

(3) T;<m,n>(x;1,...,x;n,¬¬F) –> T;<m,n>(x;1,...,x;n,F)

vil være gyldig i enhver slik modell. Dette er to meget enkle eksempler. Det er lett å gi eksempler som er langt mer vidløftige.

Sammenhengen mellom krav på diverse funksjonene $f$;<m,n>(R) og gyldige formler for de intensjonale operatorene vil bli studert mer utførlig, på en generell, teknisk måte i Kapittel V. Før dette gjøres er det imidlertid vesentlig å få aksiomatisert Val;L(X1) der L er et J;0-språk og X1 er klassen av alle J;0-modeller for L. Likeledes er det av stor betydning å få aksiomatisert Val;L(X2) der L er et I;0-språk og X2 er klassen av alle I;0-modeller for L.

Dette skal vi gjøre i de to neste kapitlene. Vi vil der definere to *minimale* intensjonale logikker J;0 og I;0 og dernest vise at disse er komplette.

Inntil dette punkt har vi bare definert hva som menes med gyldighet i en modell og i forbindelse med en klasse av modeller. Dette er et presist teknisk begrep. Men muligens viktigere enn dette tekniske begrep er vårt mer intuitive begrep om logisk sannhet for konkrete intensjonale språk av den typen vi ga et eksempel på i Kapittel I, §2. La L være et slikt språk. La "I(L)" stå for mengden av alle de formlene i L som vi intuitivt vil anse for å være logisk sanne i L. Vår semantikk ville da være intuitiv adekvat om vi for ethvert slikt språk L kunne finne en klasse av modeller X Inkl Mod;(I;0)(L) slik at I(L) = Val;L(X). Spørsmålet om I;0-semantikken er intuitivt adekvat i denne forstand vil bli mer utførlig diskutert i Kapittel VI.

# Kapittel III

Syntaks

**§1 Definisjon av de aksiomatiske systemene I:0 og J:0. Introduksjon av en rekke syntaktiske begreper.**

I dette avsnittet skal vi gi en syntaktisk definisjon av to logiske systemene I;0 og J;0. Dette er minimalsystemer i den forstand at vi ikke vil betrakte noen svakere systemer og at alle andre logikker vi betrakter kan oppfattes som utvidelser av disse.

La L være et I;0-språk. Med I;0-aksiomene i L, i symboler "Ax(I;0,L)" forstår vi de formlene i L som er instanser av de følgende skjemaer:

A1 F –> (G –> F)

A2 (F –> (G –>H)) –>((F–>G) –> (F –>H))

A3 ((¬G) –>(¬F)) –> (F –> G)

A4 (Ax)F –> F;x[a] forutsatt at a enten er en konstant eller et variabeltegn i L.

A5 (Ax)(F –> G) –> (F –> (Ax)G) forutsatt at x ikke forekommer fri i F.

A6 (Ax)(x=x)

A7 x = y –> (F –> F') forutsatt at F' er som F unntatt eventuelt ved å ha en fri forekomst av y på et eller flere steder hvor F har en fri forekomst av x

A8 t;1 = r;1& ... & t;m = r;m –> (P(t;1,...,t;m) –> P(r;1,...,r;m)) forutsatt at t;1,...,t;m,r;1,...,r;m er termer i L og P et m-ært predikat i L (m≥1)

A9 t;1 = r;1& ... & t;m = r;m –>
(T;<m,n>(t;1,...,t;m,F) –> T;<m,n>(r;1,...,r;m,F) forutsatt at t;1,...,t;m,r;1,...,r;m er termer i L og F er en m-ært formel i L (m≥0)

A10 P(t;1,...,t;n) –> (Ex)(x= t;i) (i =1,..,n) forutsatt at P er et n-ært predikat i L, t;1,...,t;n termer i L og x ikke forekommer fri i t;i.

A11 T;<m,n>(t;1,...,t;m,F) –> (Ex)(x= t;i) (i =1,..,m) forutsatt at t;1,...,t;n termer i L og x ikke forekommer fri i t;i.

A12 t;1 = r;1& ... & t;n = r;n –> (f(t;1,...,t;n) = f(r;1,...,r;n)) forutsatt at t;1,...,t;m,r;1,...,r;m er termer i L og f et n-ært funksjonssymbol i L (m≥1)

A13 (Ex)(x= f(t;1,....,t;n)) <–> (Ex)(x=t;1) &.... & (Ex)(x=t;n) forutsatt at x ikke forekommer fri i noen av t;1,...,t;n.

A14 (Ay)( y = (ix)F <–> (Ax)(F <–> x=y) forutsatt at y ikke forekommer fri i F

A15 U(μ(F))

A16 T;<m,n>(x;1,...,x;n,F) <–> t;<m,n>(x;1,...,x;n,μ(F))

A17 t;<m,n>(x;1,...,x;n,y) –> U(y)

A18 μ(F)≠ μ(G) forutsatt at F og G er distinkte formler og F ikke er noen substitusjonsinstans av G

A19 μ(F;(x;1,...,x;n)[a;1,...,a;n]) = μ(F;(x;1,...,x;n)[b;1,...,b;n]) –> a;i = b;i der i= 1,...,n forutsatt at a;1,...,a;n,b;1,...,b;n er enkle termer i L

A20 T;<m,n>(x,1,...,x;n,F) –> F forutsatt at <m,n> er indeksen til en streng intensjonal operator.

Dette avslutter listen over aksiomskjemaer.

Vi har nå definert I;0-aksiomene i L. Anta nå at L er et J;0-språk. Med J;0-aksiomene i L, Ax(J;0,L) forstår man da alle formler i L som er instanser av skjemaene: A1 – A14 og A20 og ingen andre formler.

Anta L enten er et I;0-språk eller et J;0-språk. Anta Δ Inkl Fml(L), med andre ord at Δ er en klasse med formler i L. Vi sier da at Δ *er lukket under modus ponens (MP)* hvis og bare hvis man har for alle formler F,G i L at GêΔ dersom FêΔ og (F–>G)êΔ. Vi sier at Δ er *lukket under universell generalisering* (UG) hvis og bare hvis man for alle formler F i L og ethvert variabeltegn x har at (Ax)FêΔ dersom FêΔ.

Vi innfører nå en rekke syntaktiske begreper som er viktige i det følgende. Med *I;0 teoremene i et I:0-språk L* forstår vi snittet av alle de formelmengder X der X Inkl Fml(L) som inneholder I;0-aksiomene i L og som dessuten er lukket under modus ponens og universell generalisering. Tilsvarende er J;0-teoremene i et J;0-språk L den minste formelmengden X i L som inneholder alle J;0-aksiomene i L og som i tillegg er lukket under modus ponens og universell generalisering.

Vi definerer ß(Δ,I;0,L), der det forutsettes at L er et I;0-språk og Δ en formelmengde i L, som den minste formelmengden i L som inneholder Δ og alle I;0-aksiomene i L og som er lukket under modus ponens og universell gene-ralisering. Uttrykket "ß(Δ,I;0,L)" leses "I;0-teorien i L med aksiommengde Δ". På tilsvarende vis defineres "ß(Δ,J;0,L)" der det forutsettes at L er et J;0-språk og Δ inkl Fml(L), som den minste mengden som inneholder Δ og alle J;0-aksiomene i L og som dessuten er lukket under modus ponens og universell generalisering. Uttrykket "ß(Δ,J;0,L)" leses "J;0-teorien i L med aksiommengde Δ".

Med en I;0-teori i et I;0-språk L forstås en formelmengde T der T= ß(Δ,I;0,L) for en eller annen Δ Inkl Fml(L). Tilsvarende forstår vi med en J;0-teori i L, der L er et J;0-språk, en formelmengde T der T= ß(Δ,J;0,L) for en eller annen Δ Inkl Fml(L).

La oss så innføre endel begreper av bevisteoretisk natur. Med et I;0-bevis i L, der L er et I;0-språk, forstår vi en sekvens av formler F;1,....,F;n i L der man har at F;i for $1 \leq i \leq n$ enten er et I;0-aksiom i L, eller er slik at det finnes k,j hvor $0 \leq k,j < i$ slik at F;k = (F;j –> F;i), eller der man har at F;i = (Ax)F;j for noe variabeltegn x og noe j der $1 \leq j < i$. Sagt på en annen måte kan man si at et I;0-bevis i L er en formelsekvens der hver formel enten er et I;0-aksiom i L er sluttet fra tidligere formler i rekken ved hjelp av modus ponens og universell generalisering.

Med et I;0-bevis for formelen F i L, der L er et I;0-språk, forstår vi et I;0 bevis F;1,...,F;n i L der F;n = F. Vi sier at F er I;0-bevisbar i L, i symboler "(I;0,L) :– F", hvis og bare hvis det finnes et I;0-bevis i L for F.

Med et I;0-bevis i L ut fra Δ, der Δ inkl Fml(L) forstår vi en sekvens F;1,...,F;n i L ($n \geq 1$) der F;i enten er med i ΔUAx(I;0,L) eller der det finnes k,j hvor $0 \leq k,j < i$ slik at F;k = (F;j –> F;i), eller der man har at F;i = (Ax)F;j for noe variabeltegn x og noe j der $1 \leq j < i$. Sagt på en annen måte kan man si at et I;0-bevis i L ut fra Δ er en formelsekvens der hver formel enten er et I;0-aksiom i L eller med i Δ eller er sluttet fra tidligere formler i rekken ved hjelp av modus ponens og universell generalisering.

Med et I;0-bevis i L ut fra Δ for formelen F forstås et I;0-bevis i L ut fra Δ, F;1,...,F;n der F=F;1. Endelig kalles en formel F for I;0 bevisbar i L ut fra Δ, i symboler "(I;0,L,Δ) :– F", hvis og bare hvis det finnes et I;0-bevis i L ut fra Δ for formelen F.

Vi definerer uttrykkene "J;0-bevis i L", "J;0-bevis for formelen F i L", "F er J:0-bevisbar i L", "J;0-bevis i L ut fra Δ", "J;0-bevis for formelen F i L ut fra Δ", "F er J:0-bevisbar i L ut fra Δ" på samme måte som ved systemet I;0. I definisjonen som er gitt rett ovenfor behøver man bare erstatte uttrykket "I;0" overalt med uttrykket "J,0". Vi bruker Th(J;0,L) for J;0-teoremene i L. "Th(I;0,L)" betegner I;0-teoremene i L[15]

---

[15] Det er en standardsak hvordan man utleder de vanlige resultatene om kvantorer på grunnlag av aksiomene A1 – A20. For dette formål behøver man bare å benytte aksiomene A1 – A7. Vi kunne ha benyttet en svakere versjon av A7, nemlig:

A7° x=y –>. T;<m,n>(w;1,...,w;m,F) –> T;<m,n>(w;1,...,w;m,F')

der F' er som F untatt eventuelt ved å ha en fri forekomst av variabeltegnet y på et eller flere steder hvor F har en

Det skulle være lett å se ( ved et enkelt induksjonsbevis) at om T =ß(Δ,I;0,L) er en I;0-teori i L så har man at FêT hvis og bare hvis (I;0,L,Δ) :– F. Videre skulle det være klart at FêTh(I;0,L) hvis og bare hvis (I;0,L) :– F. Det samme gjelder om vi her erstatter "I;0" med uttrykket "J;0".

I stedet for den noe klumsete notasjonen "(I;0,L,Δ) :– F" skal vi av og til skrive "T :– F" når det fra konteksten fremgår at T = ß(Δ,I;0,L). I stedet for å skrive "(I;0,L) :– F" skal vi også av og til skrive "I;0 :– F" når det er klart fra sammenhengen hvilket språk det er det dreier seg om. Nøyaktig de samme bemerkningene kan gjøres i forbindelse med J;0. Isteden for å skrive
"(J;0,L,Δ) :– F" skrives "T :– F" om det er klart at T=ß(Δ,J;0,L). Isteden for
"(J;0,L) :– F" skrives "J;0 :– F"

## §2 En rekke viktige hjelpesetninger. Bevis for at alle teoremene i I:0 og J:0 er gyldige.

Vi formulerer i denne paragrafen de følgende hjelpesetninger som vi vil gjøre bruk av senere. Siden bevisene imidlertid er meget lange – det dreier seg om temmelig enkle og likefremme induksjonsbevis[16] – har vi valgt å sløyfe dem siden de ellers ville ta uforholdsmessig mye plass.

I det følgende lar vi "S" stå for enten "I;0" eller "J;0".

**Lemma 2.1** La L være et S-språk og R en S-modell for L. Anta FêFml(L(R)) og at F i høyden har x som fri variabel. Anta têTerm(L(R)) og at også t i høyden har et fritt variabeltegn x. Anta k er en konstant i L og at i er et navn i L(R) der man har at R(i) = R(k). Da gjelder:

(i) g(R)(t;x[i]) = g(R)(t;x[k])
(ii) g(R)(F;x[i]) = g(R)(F;x[k])
(iii) R(t;x[i]) = R(t;x[k])
(iv) R(F;x[i]) = R(F;x[k])

Den neste hjelpesetningen er denne:

**Lemma 2.2** Anta L;2 og L;1 er S-språk og at L;2 er et språk for L;1. Anta g er en L-morfi fra L;1 over i L;2. Under disse forutsetningene gjelder:

(a) Er F,GêCFml(L;1) og g(F) = g(G) finnes en formel H i L;1 og konstanter c;1,...,c;n, c°;1,...,c°;n der vi har:

(i) H;(x;1,...,x;n)[c;1,...,c;n] = F

---

fri forekomst av x. A7° er et spesialtilfelle av A7. Resten av instansene av A7 er imidlertid utledbare i systemet med aksiomer A1 – A20 der A7 er erstattet med A7°. Merk også at vi har I;0 :– x=y –>. (Ez)(z=t) –> t=t' der t' er som t unntatt eventuelt ved å ha en fri forekomst av y på et eller flere steder hvor t har en fri forekomst av x.

16 Med et velformet uttrykk u i L forstås en term eller formel i L. Med lengden til et velformet uttrykk u i L forstår man antallet forekomster av funksjonsymboler, predikater, konnektiver, i-operator, kvantorer og intensjonale operatorer i u. F.eks. er lengden til P(t;1,...,t;n) lik summen av lengdene til t;1,...,t;n pluss 1. Videre har man at lh((Ax)F) = lh(F)+1, lh(FvG)= lh(F)+lh(G)+1 osv. De eneste uttrykkene av lengde 0 er konstantene, de singulære termene i snever forstand og variabeltegnene. Istedenfor å ha brukt ordet "lengde" kunne vi også ha brukt ordet "kompleksitet" og snakket om induksjonsbevis på kompleksiteten av velformede uttrykk. Kanskje dette ville ha vært et heldigere valg av terminologi. Vi skal imidlertid konsekvent bruke "lengde" i det følgende.

(ii) H;(x;1,...,x;n)[c°;1,...,c°;n] = G
(iii) g(c;i) = g(c°;i) for i = 1,...,n (n≥0)

(b) Er t;1,t;2êCTerm(L;1) og g(t;1) = g(t;2) finnes en term t i L;1 og konstanter c;1,...,c;n, c°;1,...,c°;n der vi har:
(i) t;(x;1,...,x;n)[c;1,...,c;n] = t;1
(ii) t;(x;1,...,x;n)[c°;1,...,c°;n] = t;2
(iii) g(c;i) = g(c°;i) for i = 1,...,n (n≥0)

**Lemma 2.3** Anta L;2 og L;1 er S-språk og at L;2 er et språk for L;1. Anta g er en L-morfi fra L;1 over i L;2. Anta FêFml(L) og at t, t;1,...,t;nêTerm(L;1). da gjelder:
(a) g(F;(x;1,...,x;n)[t;1,...,t;n]) = g(F);(x;1,...,x;n)[g(t;1),...,g(t;n)]
(b) g(t;(x;1,...,x;n)[t;1,...,t;n]) = g(t);(x;1,...,x;n)[g(t;1),...,g(t;n)]

Vi trenger også den følgende hjelpesetningen:

**Lemma 2.4** Anta L,L' er S-språk og at L er som L' unntatt eventuelt ved at Const(L') Inkl Const(L). La g være en L-morfi fra L over i L' der man har at
g(u) = u om u er enten en konstant, en singulær term i snever forstand, et predikat eller et funksjonssymbol i L'. Da har man at g(F)=F for enhver formel FêFml(L') og g(t) =t for enhver têTerm(L').

Det følgende teorem er viktig og innebærer at systemene I;0 og J;0 er konsistente.[17]

[17] Det er mulig å gi et fullstendighetsbevis for kalkylen J;0 om vi utelater aksiomskjemaet A7, dvs. Leibniz lov. Man får da et system med hva man kunne kalle ikke-Leibniziansk identitetsteori. Identitetsrelasjonen blir imidlertid substitutiv i alle ekstensjonale kontekster. (Dette innebærer at koreferensielle termer kan erstattes for hverandre salva veritate i alle kontekster unntatt innenfor området til intensjonale operatorer). Dette skyldes at vi fremdeles har aksiomskjemaene A6 og A8 – A11 med i teorien. Semantikken for dette systemet er en variant av den vi har beskrevet i Kapittel II. Jeg har utformet to versjoner. Den ene er slik at vi ikke uten videre kan ha beskrivelser i språket og må kutte vekk dem og funksjonssymbolene. Den andre versjonen fungerer med dette tilleggs-utstyret. Det interessante ved denne semantikken er at den kan betraktes som en generalisering av teorien i Kapittel II. For systemet I;0 med aksiomet A7 sløyfet har vi også kunnet angi en semantikk som validerer alle aksiomskjemaene og slutningsreglene. Men vi har ikke vært i stand til å bevise kompletthet. Det er også mulig å innføre to identitetsrelasjoner. En streng form for identitet "=" som adlyder alle de vanlige lovene for identitet. Dette innebærer at også Leibniz lov , dvs.

(1) (Ax)(Ay)(x=y –>. F(x) –> F(y)) er gyldig, og en svak form for identitet "≈" der loven (1) ikke er gyldig om "=" erstattes med "≈". Jeg har bevist kompletthet for kalkyler av alle disse typene og også generelle kompletthetsteoremer av den typen man vil finne i Kapittel V og VII. Jeg håper at disse resultatene kan bli tilgjengelige for interesserte i fremtid. En preliminær versjon av materialet foreligger.

Fra en intuitiv synsvinkel er det nærliggende å tro at systemer der alle instanser av A7 ikke er utledbare er semantisk ufullstendige om "=" gis sin vanlige betydning av identitet. F.eks. kan ingen setning av typen (Ex)(Ey)(x=y & T;<1,0>(a,P(x)) & ¬ T;<1,0>(a,P(x))) være sann om "=" oppfattes som vanlig identitet. Hvis derfor negasjonen av denne setningen ikke er utledbar er ikke systemet fullstendig. Kompletthetsresultatene for de "ikke-Leibnizianske" systemene som ble nevnt ovenfor motsier imidlertid ikke dette. For ser man nøyere på hvordan "=" tolkes i semantikken for disse systemene ser man umiddelbart at "=" ikke gis betydningen av vanlig identitet. Predikatet kan snarere sies å uttrykke en slags "ekstensjonal ekvivalens". Ser man på semantikken introdusert iKapittel II er det imidlertid lett å se at :

(1) (Ax)(Ay)(x=y –> F(x) –> F(y)) og (2) (Ax)(x=x) er gyldige. For at "=" skal uttrykke identitet er det klart at "=" oppfyller lovene (1) og (2). Er det imidlertid tilstrekkelig? Jeg tror ikke spørsmålet har noen klar mening siden vi ikke har gitt noe kriterium for når et binært predikat P kan sies å uttrykke identitet. Lar man kriteriet være at (1) og (2) er gyldige når "P" innsettes for "=" er svaret selvfølgelig bekreftende. Et annet kriterium for at "=" kunne sies å uttrykke identitet som man kunne forslå er at "=" tilordnes relajonen Mg(<x,y>: x=y & x,yêD) i enhver modell der D er det området man kvantifiserer over . I denne forstand er det helt klart at "=", slik vi intepreterer det, uttrykker identitet. Nå har man at t=t' –> F(t) –> F(t') ikke er gyldig

**Teorem 2.5** (Gyldighetsteorem)

(a) La T= ß(Δ,I;0,L) være en I;0-teori i L der L er et I;0-språk. La R være en normal (seminormal) I;0 modell for Δ. Da er R en modell for T.

(b) La T= ß(Δ,I;0,L) være en J;0-teori i L der L er et J;0-språk. La R være en J;0 modell for Δ. Da er R en modell for T.

**Bevis:** Vi ser bare på punkt (a) siden det ikke kommer noe vesentlig nytt inn i beviset for (b). For å bevise punkt (a) er det åpenbart tilstrekkelig å bevise:

(1) R := Ax(I;0,L) og

(2) R := F & R:= (F–>G) –> R := G

(3) R := F –> R := (Ax)F

om R er en normal (seminormal) I;0-modell. Bevisene for (2) og (3) er trivielle og overlates til leseren. Vi har i det vesentlige gjennomgått beviset for (1) i Kapittel II, §8 – §9. De tilfellene som gjenstår overlates til leseren. **Q.E.D.**

## §3 Hjelpesetninger og viktige metateoremer.

I det følgende lar vi "S" stå for enten "I;0" eller "J;0". Anta L og L' er S-språk og der L er en utvidelse av L' med nye ikke-logiske symboler. Anta R =<m,g,∏> er en S-modell for L. Med restriksjonen av R til L', i symboler "R|L'" forstår vi modellen R' = <m,g',∏'> der g' og ∏' er definert ved at g'(u) = g(u) om u er en konstant, en singulær term i snever forstand, et n-ært predikat, eller et n-ært funksjonssymbol i L', og ∏'(u) = ∏(u) om u er en konstant, en singulær term i snever forstand, et n-ært predikat, eller et n-ært funksjonssymbol i L'

**Lemma 3.1** Anta L,L' er S-språk der L er en utvidelse av L' med nye ikke-logiske symboler. Anta R en S-modell for L. Da har man for alle formler F i L' at:

R := F <–> (R|L') := F

**Lemma 3.2** Anta L,L' er S-språk der L er en utvidelse av L' med nye ikke-logiske symboler. Anta Δ' Inkl Fml(L') og Δ Inkl Fml(L). Anta videre at

ß(Δ',S,L') Inkl ß(Δ,S,L). Anta R er en S-modell for ß(Δ,S,L). Da er R|L' en S-modell for ß(Δ',S,L').

Beviset for Lemma 3.1 er et enkelt induksjonsbevis på lengden av velformede uttrykk i L'. Dette overlates til leseren. Lemma 3.2 er en temmelig umiddelbar konsekvens av Lemma 3.1.

De følgende teoremer blir bevist på samme nøyaktig samme måte som de likelydende teoremer i Shoenfield [1], §3.3 og §4.1:

**Teorem 3.3** (Deduksjonsteorem) La L være et S-språk, F en lukket formel i L, Δ inkl Fml(L). Da gjelder:

(S,L, ΔU{F}) :– G <–> (S,L, Δ) :– (F–>G)

**Teorem 3.4** (Konstant-teorem) La L være et S-språk og e;1,...,e;n n distinkte konstanter

---

for termer t,t' generelt. Viser dette at setninger av arten t=t' ikke er "genuine" identitetssetninger? Spørsmålet er ikke særlig klart og det kan ikke uten videre tas for gitt at det har noen mening i det hele tatt. Men er en setning av typen t=t' en genuin identitetssetning om "=" uttrykker identitet, og kriteriet for dette i sin tur er at lovene (1) og (2) er gyldige, kan jeg ikke se annet enn at alle setninger av typen t=t' er genuine identitetssetninger om vår semantikk legges til grunn.

som ikke er med i L. La L' være L utvidet med disse konstantene. Er da FêFml(L), Δ Inkl Fml(L) har man at:

(S,L, Δ) :– F <–> (S,L', Δ) :– F;(x;1,...,x;n)[e;1,...,e;n]

La L være et S-språk. Vi sier da at T = ß(Δ,S,L) er *konsistent* hvis og bare hvis det ikke finnes noen formel F i L som er slik at (S,L,Δ) :– (F&¬F).

**Teorem 3.5** (Reduksjonsteorem) La L være et S-språk og anta Δ;1 Inkl Fml(L) og Δ;2 Inkl Fml(L). Anta Δ;2≠ø. Da holder (S,L,Δ;1UΔ;2) :– G hvis og bare hvis det finnes F;1,...,F;nêΔ;2 slik at (S,L,Δ;1) :– (F;1' &... & F;n'. –> G) der F;i' for i=1,...,n er den universelle lukningen av F;i.

**Teorem 3.6** (Reduksjonsteorem for konsistens) La L være et S-språk. Anta Δ;1 Inkl Fml(L) &Δ:2 Inkl Fml(L) og at Δ;2 ≠ø. Da er ß(Δ;1UΔ;2,S,L) konsistent hvis og bare hvis det ikke finnes noen formler F;1,...,F;nêΔ;2 slik at:

(S,L,Δ;1) :– (¬F;1 v ¬F;2' v ... v ¬F;n') der F;i' er den universelle lukningen av F;i.

Den følgende sats er et korollar til Teorem 3.6:

**Korollar 3.7** La L være et S-språk. Anta F er en formel i L Da har man at ß(ΔU{F}, S,L) er konsistent hvis og bare hvis ¬((S,L,Δ) : – (¬F')) der F' er den universelle lukningen av F.

La L være et S-språk. Vi skal utvide L ved en induktiv prosess med visse konstanter, *spesielle konstanter*. Vi skal definere *de spesielle konstantene på nivå n* ved induksjon på n. Anta de spesielle konstantene på alle nivåer lavere enn n har blitt definert. La (Ex)F være en lukket formel som er dannet ved hjelp av uttrykkene i L og disse spesielle konstantene på lavere nivå enn n. Er n>0, anta at (Ex)F også inneholder i det minste en spesiell konstant på nivå n–1. Da er symbolet som består av bokstaven c med formelen (Ex)F påført som subskript en spesiell konstant på nivå n. Vi betegner denne med c^(Ex)F og kaller den for den spesielle konstanten for (Ex)F. Språket vi får fra L ved å legge til alle de spesielle konstantene på alle nivåer betegner vi med L;c. Vi bemerker at om (Ex)F er en lukket formel i L;c så finnes det en og bare en spesiell konstant for (Ex)F og nivået til denne er en større en maksimum av nivåene til de spesielle konstantene som forekommer i (Ex)F. I det følgende benyttes r,s som syntaktiske variabler for spesielle konstanter. Er (Ex)F en lukket formel i L;c og r den spesielle konstanten for (Ex)F kalles formelen: (Ex)F –> F;[r] det *spesielle aksiomet for r.*

La T =ß(Δ,S,L) være en S-teori i et S-språk L. En slik teori kalles en *Henkin-teori* hvis og bare hvis man har, for enhver lukket formel (Ex)F i L, at det finnes en konstant e slik at (S,L,Δ) :– ((Ex)F –> F;x[e]). T kalles *komplett* hvis og bare hvis man for enhver lukket formel i L har at enten (S,L,Δ) :– F eller at (S,L,Δ) :– (¬F).

La T=ß(Δ,S,L) være en S-teori i et S-språk L. la T' = ß(Δ',S,L') være en S-teori i et S-språk L' der L' er en utvidelse av L. *T' sies da å være en konservativ utvidelse av T* hvis og bare hvis man har T Inkl T' og dessuten at T'Ω Fml(L) =T.

La nå T=ß(Δ,S,L) være en S-teori i L. La T;c= ß(Δ',S,L;c) være S-teorien i L;c der Δ' er Δ utvidet med alle de spesielle aksiomene for alle de spesielle konstantene i L;c. T;c er åpenbart en utvidelse av T og den er videre per konstruksjon en Henkin-teori.

Vi har:

**Lemma 3.8** T;c er en konservativ utvidelse av T.

Beviset for denne hjelpesetningen er nøyaktig som beviset for Lemma 3 i §4.2 i Shoenfield [1]. Som der beviser vi også det følgende teorem:

**Teorem 3.9** (Lindenbaums teorem) La ß(Δ,S,L) være en konsistent S-teori i et S-språk L. Da finnes en komplett S-teori ß(Δ',S,L) der Δ' = ΔUX for en eller annen formelmengde X Inkl Fml(L).

Dermed har vi faktisk gitt en fullstendig oversikt over alle de hjelpesetningene og teoremene som vi trenger for fullstendighetsbevisene i de neste kapitlene.

# Kapittel IV

Grunnleggende fullstendighetsresultater

## §1 Bevis for at systemet J:0 er fullstendig.

Vi skal bevise det følgende viktige teorem:[18]

**Teorem 1.1** La T= ß(Δ, J;0,L) være en konsistent J;0-teori i L. Da finnes en J;0-modell R for L slik at R := T.

**Bevis:** La T= ß(Δ, J;0,L) være en komplett J;0-teori i L som er en Henkin-teori. Definer en ekvivalensrelasjon ≈;T over Const(L) ved å sette <e;1,e;2>ê (≈;T) hvis og bare hvis T:– (e;1 = e;2). Ekvivalensklassen til en konstant e med hensyn på ekvivalensrelasjonen ≈;T betegner vi med "[e];T". Vi skal sløyfe indeksen T i "[e];T" siden vi vil anta at T er fiksert i løpet av hele beviset. La ∂ være en utvalgsfunksjon som har Mg([e]: eêConst(L)) som domene og som plukker ut en representant for hver ekvivalensklasse. Da har man at (∂[e])ê[e] for alle eêConst(L). Man kan vise at en slik utvalgsfunksjon eksisterer ved hjelp av utvalgsaksiomet. Vi definerer nå en J;0-modellstruktur m;T, der:

m;T = <*;T, D;T, f;T,£;T,<*f*;T(<m,n>)>/<m,n>êNXN>

for L ved å sette at *;T er en formel i L, D;T er Mg(∂([c]) : cêConst(L)), f;T = Rest(I,D;T) og £;T = L men med konstantmengden begrenset til D;T. Vi definerer så en L-morfi g;T fra L(D;T) over i £;T ved å sette g;T(e) = ∂([e]) om e er en konstant i L og g(u) =u om u er en singulær term i snever forstand, et n-ært predikat (n≥1) eller et n-ært funksjonssymbol (n≥1). Tilslutt definerer vi de diverse funksjonene *f*;T(<m,n>) ved å sette:

f;T(<m,n>)(∂([e;1]),.....∂([e;m]) =
Mg(g;T(F): FêCFml(L) & T :– T;<m,n>(e;1,...,e;m,F))

Det er lett å vise at *f*;T(<m,n>) er veldefinert ved hjelp av A9. Vi definerer en valuasjon ∏;T assosiert med modellstrukturen m;T og L-morfien g;T ved å sette:

∏;T(P) = Mg(<∂([e;1]),.....∂([e;m]>: T :– P(e;1,...,e;m))

om P er et m-ært predikat (m≥1). Videre setter vi:

∏;T(f) = Mg(<∂([e;1]),.....∂([e;(n+1)]>: T :– f(e;1,...,e;m) = e;(n+1))

om f er et n-ært funksjonssymbol (n≥1). Man ser at ∏;T(P) og ∏;T(f) er veldefinert i kraft av A8 og A12. Vi avslutter definisjonen av ∏;T ved å sette:

∏;T(s) = (iy)[ (T :– (Ex)(x=s) & (Ee)(eêConst(L) & T: – (e=s) & y=∂([e]))) v
( ¬(T :– (Ex)(x=s)) & y = *;T)]

om s er en singulær term i snever forstand. Man må vise at dette er veldefinert. Det er klart at betingelsen etter beskrivelsesoperatoren er oppfylt av et eller annet objekt. For har man T :– (Ex)(x=s) finnes en konstant e i L slik at T :– x=e siden T er en Henkin-teori. Vi kan da la y være ∂([e]). Har vi ¬(T :– (Ex)(x=s)) vil *;T gjøre nytten. Beviset for at betingelsen ikke er oppfylt av mer enn ett objekt er lett og overlates til leseren. Merk at vi per definisjon av en valuasjon har at ∏;T(e) = (f;T);-1(g;T(e)) og derfor at ∏;T(e) = ∂([e]) om e er en konstant

[18] Fullstendigheten til vanlig første-ordens logikk ble først bevist av Gødel. Beviset her er en modifikasjon av fullstendighetsbeviset gitt for første-ordens logikk i Shoenfield [1] og stammer i det vesentlige fra Henkin. Se Henkin [1].

i L.[19]

Vi skal nå vise den følgende hjelpesetning.

**Lemma 1.2** La T være som ovenfor. Definer en J;0-modell R;T for L ved å sette R;T = <m;T, g;T, ∏;T> der komponentene er som definert ovenfor. La F være en lukket formel i L, t en lukket term i L og c en konstant i L. Da gjelder:

(1) R;T(F) =1 <–> T :– F

(2) R;T(t) = ∂([c]) <–> T :– (t =c)

**Bevis for Lemma 1.2:** Vi beviser påstanden ved induksjon på lengden av velformede uttrykk.

(i) Anta t = c' for en eller annen konstant c'. Da har man at:
∏;T(c') = ∂([c']) = ∂([c]) hvis og bare hvis T :– (c'=c) i lys av definisjonene av [c] og ∂. Satsen holder derfor i dette tilfellet.

(ii) t = s der s er en singulær term. Anta R;T(t) = ∂([c]). Da må man i lys av definisjonen av R;T ha at det finnes en konstant c' slik at (1) T :– (c'=t) og (2) ∂([c]) = ∂([c']). Fra det siste følger T :– (c = c') som sammen med (1) og A8 gir en T :– (t=c). Har man på den annen side T :– (t=c) må man ifølge definisjonen av ∏;T for singulære termer i snever forstand ha at R;T(t) = ∂([c]).

(iii) Anta t = (ix)F. Da har man R;T((ix)F) = ∂([c]) hvis og bare hvis

(3) (Ai)( ∏;T( F;x[i]) =1 <–> ∏;T(i) = ∂([c]))

La c' være en konstant i L og la i være navnet på∂([c']). Da har man R;T(c') = R;T(i) og derfor i følge Lemma 2.1 i det foregående kapittel at R;T(F;x[i]) = R;T(F;x[c']). Fra dette følger i lys av (3) at:

(4) (Ac')(∏;T(F;x[c']) =1 <–> ∏;T(c') = ∂([c]))

Omvendt må (4) implisere (3): For la i være et vilkårlig navn. Da finnes en konstant c' slik at R;T(i) = ∂([c']). Da må man ha R;T(i) = R;T(c'). Ved hjelp av Lemma 2.1 i forrige kapittel følger da R;T(F;x[i]) = R;T(F;x[c']). Da har man ved hjelp av (4) ∏;T(F;x[i]) = 1 <–> ∏;T(i) = ∂([c]) for vilkårlig navn i. Men dette impliserer (3). Vi har i lys av induksjonshypotesen at R;T(F;x[c']) =T er ekvivalent med at T :– F;x[c'] og at R;T(c') = ∂([c]) er ekvivalent med T :– (c'=c). Derfor er (4) ekvivalent med:

(5) (Ac')(T :– F;x[c'] <–> T :– (c' = c)). Men siden T er en komplett teori er dette ekvivalent med (Ac')(T :– (F;x[c'] <–> c'=c)). Det er i sin tur ekvivalent med T :– (Ax)(F <–> x=c) siden T er en komplett Henkin-teori. Men i følge A14 er dette siste ekvivalent med T :– (ix)F = c som er det vi ønsker.

(iv) Anta t= f(t;1,...,t;n) der f er et n-ært funksjonssymbol og at R;T(f(t;1,...,t;n)) = ∂([c]). Da er det umulig at R;T(t;j) = * for noe jê{1,...,n}. Det følger at R:T(f(t;1,...,t;n)) =R;T(f)(R;T(t;1),...,R;T(t;n)) = ∂([c]). Fra dette må man ha: <R;T(t;1),...,R;T(t;n), ∂([c])> êR;T(f). I følge definisjonen av R;T(f) må det i så fall eksistere konstanter c;1,...,c;n,c;(n+1) slik at

(7) R;T(t;i) = ∂([c;i]) for i=1,...,n

(8) ∂(c;(n+1)) = ∂([c]) og

(9) T :– f(c;1,...,c;n) = c;(n+1)

Fra (7) følger ved hjelp av induksjonshypotesen at (10) T :– t;i = c;i for i=1,...,n. Fra (8)

---

[19] Istedenfor å la D;T i modellen R;T være Mg(∂([c];T) : cêCont(L) kunne man ha definert D;T ved D;T = Mg([c];T: cêConst(L)). Vi måtte likevel ha en utvalgsfunksjon ∂ over Mg([c];T: cêConst(L)) for å kunne definere funksjonen f;T. Denne ville nå være definet slik: f;T([c];T) = ∂([c];T). Vi må, om vi velger å gå frem på denne måten, la £;T være L, men med konstantmengden begrenset til ∂"Mg([c];T: cêConst(L). ∏;T(u), der u er et ikke-logisk symbol, kan defineres som før unntatt ved at vi erstatter "∂([c];T)" med "[c];T" i alle klausulene i definisjonen. *f*;T(<m,n>) må også redefineres, men det skulle være opplagt hvordan det kan gjøres.

følger åpenbart: (11) T :– c= c;(n+1). (10) og A12 gir en:

(12) T :– f(t;1,...,t;n) = f(c;1,...c;n)

På grunnlag av (9), (11) og A8 har vi T :– f(c;1,...,c;n)=c. Dette sammen med (12) og A8 gir oss T :– f(t;1,...,t;n)=c som er det vi ønsker.

Anta på den annen side at T :– f(t;1,...,t;n)=c. Da har man:
T :– (Ex)(x =f(t;1,...,t;n)). Ved hjelp av aksiom A13 impliserer dette:

(13) T :– (Ex)(x=t;i) for i = 1,...,n

i det vi forutsetter at x ikke forekommer fri i noen av t;i'ene. Siden T er en Henkin-teori følger herav:

(14) T :– (c;i = t;i) for i=1,..,n for noen konstanter c;1,...,c;n.

Ved hjelp av induksjonshypotesen har man da:

(15) R;T(t;i) = ∂([c;i]) for i = 1,...,n Fra (14) og aksiom A12 har man
T :– (f(c;1,...,c;n) = f(t;1,...,t;n)). Dette sammen med vår antagelse om at
T :– f(t;1,...,t;n)=c impliserer (16) T :– f(c;1,...,c;n) =c ved hjelp av A8. Ved hjelp av (15) og (16) har man i lys av definisjonen av R;T(f) at

<R;T(t;n),....,R;T(t;n), ∂([c]) > êR;T(f) . Dette impliserer det man ønsker, nemlig:
R;T(f(t;1,...,t;n)) = ∂([c])

(v) Anta nå at F= P(t;1,...,t;n) der P er et n-ært predikat og anta at R;T(P(t;1,...,t;n)) =T. Da har man <R;T(t;1),...,R;T(t;n)>êR;T(P). Ved hjelp av definisjonen av R;T(P) impliserer dette at det finnes konstanter c;1,...,c;n slik at:

(17) R;T(t;i) = ∂([c;i]) for i =1,...,n og

(18) T :– P(c;1,...,c;n)

Fra (17) og induksjonshypotesen følger T :– t;i = c;i for i = 1,...,n. Dette og (18) gir oss så ved hjelp av A8 det man ønsker: T :– P(t;1,...,t;n).

Anta på den annen side at T :– P(t;1,...,t;n). Ved hjelp av A10 følger da:
T :– (Ex)(x=t;i) for i=1,...,n der x er en variabel som ikke forekommer fri i noen av termene t;1,...,t;n. Siden T er en Henkin-teori følger at det må finnes konstanter c;1,...,c;n slik at:

(19) T :– c;i = t;i i=1,..,n.

Ved hjelp av A8 og vår antagelse om at T :– P(t;1,...,t;n) følger herav:

(20) T :– P(c;1,...,c;n)

Fra (19) og induksjonshypotesen følger : (21) R;T(t;i) = ∂([c;i]) for i=1,...,n. (20) og (21) impliserer så R;T(P(t;1,...,t;n)) =1 i lys av definisjonen av R;T(P).[20]

(vi) Anta F =(¬G). Da har man at R;T(F) = R;T(¬G) =1 hvis og bare hvis R;T(G)=0. Men dette holder i følge induksjonshypotesen hvis og bare hvis ¬(T :– G). Siden T er en komplett teori holder ¬(T :– G) hvis og bare hvis T :– (¬G). Dette viser at satsen holder i dette tilfellet.

(vii) Anta F = (G –> H). Da har man at R;T(F) = R;T(G –>H)=1 hvis og bare hvis (R;T(G) =1 –> R;T(H)=1). Men etter induksjonshypotesen er dette tilfelle hvis og bare hvis T :– G –> T :– H. Siden T er en komplett teori er det siste ekvivalent med T :– (G –>H) ie. T :– F. Satsen holder for også i dette tilfellet.

(viii) Anta F= (Ax)G. Da har man at R;T(F) = R;T((Ax)G) =1 hvis og bare hvis R;T(G;x[i])=1 for ethvert navn i som foreligger i L(D;T), dvs. hvis og bare hvis (22) (Ai) (R;T(G;x[i]) =1). Anta c er en vilkårlig konstant i L. La i være navnet på ∂([c]). Da har man R;T(i) = R;T(c). Ved hjelp av Lemma 2.1 i Kapittel III kan man fra dette slutte at R;T(G;x[i]) = R;T(G;x[c]). Siden c var en vilkårlig konstant i L har vi derfor i lys av (22):

(23) (Ae)(eêConst(L) –> R;T(G;x[e]) = 1)

Omvendt kan man vise at (23) impliserer (22). For la i være et vilkårlig navn i L(D;T). Da vil det finnes en konstant c' i L som er slik at i er navn på ∂([c]). Da må man ha R;T(c) =

---

[20] Merk at man må verifisere at ∏;T(=) = I|D;T om man lar ∏;T(=) være definert ved:
∏;T(=) = Mg(<∂([c];T), ∂([c'];T)>: T :– c=c'). Det skulle imidlertid være temmelig lett å vise at dette holder.

R;T(i) og derfor i følge Lemma 2.1 i Kapittel III at
R;T(G;x[i]) = R;T(G;x[c]). Men fra (23) følger at R;T(G;x[c]) =1 og derfor at
R;T(G;x[i]) = 1. Siden i var et vilkårlig navn følger (22). I lys av induksjonshypotesen har man at (23) er ekvivalent med:

(Ae)(eêConst(L) –> T :– G;x[e]).

Siden T er en komplett Henkin-teori er dette imidlertid ekvivalent med at
T :– (Ax)G som er det vi ønsker.

(ix) Anta F = T;<m,n>(t;1,...,t;n,G). Anta R;T(T;<m,n>(t;1,...,t;n,G))=1. Da har man i lys av definisjonen av R;T at:

(24) g;T(G)ê*f*;T(<m,n>)(∂([c;1]),....,∂([c;m]) for noen konstanter c;1,...,c;m der R;T(t;i) =∂([c;i]) (i=1,..,m). I lys av induksjonshypotesen følger da:

(25) T :– t;i=c;i for i=1,...,m

Videre følger fra (24) i lys av definisjonen av *f*;T(<m,n>) at det må finnes en lukket formel G' i L slik at

(26) g;T(G') = g;T(G) og

(27) T :– T;<m,n>(c;1,...,c;m,G').

Fra Lemma 2.2 i Kapittel III og (26) følger at det må finnes en formel H og konstanter k;1,...,k;n, k;1',....,k;n' slik at:

(28) H;(x;1,....,x;n)[k;1,....,k;n] = G og

(29) H;(x;1,....,x;n)[k;1',....,k;n'] = G'

og der man dessuten har g;T(k;i) = g;T(k;i') for i=1,...,n. Fra det siste følger ved hjelp av definisjonen av g;T at (30) ∂([k;i]) =∂([k;i']) for i =1,...,n og derfor at

(31) T :– k;i = k;i' for i= 1,...,n. Ved hjelp av A7, (27), (28), (29) og (31) følger nå T :– T;<m,n>(c;1,...,c;n,G). Dette og (25) impliserer i lys av A9 at
T :– T;<m,n>(t;1,...,t;n,G) som er det vi ønsker.

Anta på den annen side at T :– T;<m,n>(t;1,...,t;m,G). I lys av A11 må man da ha T :– (Ex)(x=t;i) for i=1,...,m, forutsatt at x ikke forekommer fri i noen t;i. Siden T er en Henkin-teori må man da ha at det finnes konstanter c;1,...,c;n slik at:

(32) T :– c;i = t;i (i=1,...,m) I lys av antagelsen om at:
T :– T;<m,n>(t;1,...,t;m,G) og det at A9 er et aksiom i T følger ved hjelp av (32) at:

(33) T :– T;<m,n>(c;1,...,c;m,G)

Dette impliserer ved hjelp av definisjonen av *f*;T(<m,n>) :

(34) g;T(G)ê*f*;T(<m,n>)(∂([c;1]),....,∂([c;m]). Fra (32) og induksjons-hypotesen har man R;T(t;i) = ∂([c;i]) for i= 1,...,m. Dette og (34) impliserer så det man ønsker nemlig at R;T(T;<m,n>(t;1,...,t;n,G) = 1.

På dette punkt i vårt bevis er det naturlig å nevne to ting:

(A) Anta den J;0-modellen R;T som vi har definert er en J;0-modell av første slag. (Se Kapittel II, §9). I induksjonstrinnet (ix) ovenfor må man da sondre mellom to tilfelle ettersom <m,n> er indeksen til en streng eller svak intensjonal operator. I tilfelle <m,n> er indeksen til en svak intensjonal operator er beviset som ovenfor. I tilfelle <m,n> er indeksen til en streng intensjonal operator er første halvdelen av beviset som ovenfor under punkt (ix). I den andre halvdelen følger fra antagelsen T :– T;<m,n>(t;1,...,t;m,G) i lys av aksiomet A20 at T :– G siden T;<m,n> er en streng intensjonal operator. Fra dette og induksjons-hypotesen utleder vi da (36) R;T(G)=T. Vi utleder (34) og (35) som ovenfor og får R;T(T;<m,n>(t;1,...,t;m,G))=1 fra (34), (35) og (36).

Dermed kan man anse beviset for Lemma 1.2 som avsluttet.

(B) Har vi til hensikt at den J;0-modellen som vi har konstruert skal være av det andre

slaget, må man verifisere at

*f*;T(<m,n>)(x;1,...,x;m)ΩX;(R;T,L) Inkl Tr;L(R;T)

om x;1,...,x;nêD;T og <m,n> er indeksen til en streng intensjonal operator. Dette er enkelt i lys av Lemma 1.2 som vi nå har bevist. Anta

Fê*f*;T(<m,n>)(x;1,...,x;m)ΩX;(R;T,L) der <m,n> er indeksen til en streng intensjonal operator og x;1,...,x;nêD;T. Vi må da ha at det finnes konstanter c;1,...,c;m der x;i =∂([c;i]) for i=1,...,m. Da følger at Fê*f*;T(<m,n>)(∂([c;1]),...,∂([c;m])). I lys av definisjonen av *f*;T(<m,n>) følger det at det finnes GêCFml(L) der man har:

(37) F = g;T(G) og

(38) T :– T;<m,n>(c;1,...,c;m,G)

Fra (38) og det at aksiom A20 er med i T følger at (39) T :– G. I lys av Lemma 1.2 har man da (40) R;T(G)=1. Fra (37) og (40) og det faktum at GêCFml(L(R;T)) følger så i lys av definisjonen av "Tr;L(R)" at GêTr;L(R;T).

Vi kan nå fullføre beviset for Teorem 1.1. La T;0 = ß(Δ;0,J;0,L;0) være en konsistent J;0-teori i L;0. Vi utvider L;0 med spesielle konstanter til et språk L = (L;0);c og utvider Δ;0 til en mengde Δ' Inkl Fml((L;0);c) ved å føye til alle de spesielle aksiomene for de spesielle konstantene i (L;0);c slik at vi får en J;0-teori T;c = ß(Δ',J;0,L). Denne prosedyren ble beskrevet i Kapittel III. T;c er ved konstruksjon en Henkin-teori og er ifølge Lemma 3.8 i Kapittel III en konservativ utvidelse av T;0. Den må følgelig være konsistent. I følge Teorem 3.9 i Kapittel III finnes det nå en komplett teori T = ß(Δ,J;0,L) der Δ' Inkl Δ. T må åpenbart være en Henkin-teori. Vi definerer nå med utgangspunkt i T, R;T slik som beskrevet ovenfor. Vi har da R;T := T. For er FêT har man at T :– F. Da følger det at T :– F' der F' er den universelle lukningen av F. Ved hjelp av Lemma 1.2 har man da R;T(F')=1 og derfor R;T := F. Ved hjelp av Lemma 3.2 i Kapittel III kan man nå slutte at R;T|L;0 er en modell for T;0.

Dette avslutter vårt bevis for Teorem 1.1. **Q.E.D.**

## §2 Bevis for at systemet I:0 er fullstendig.

Vi skal nå vise at I;0 er komplett. Mer spesifikt skal vi gi bevis for den følgende påstand:

**Teorem 2.1** La T= ß(Δ,I;0,L) være en konsistent I;0-teori i et I;0-språk L. Da finnes det en seminormal I;0-modell R for L som er en modell for T, ie. der R := T.

**Bevis:** La T = ß(Δ,I;0,L) være en I;0-teori i L som er en komplett Henkin-teori. Vi definerer ≈;T nøyaktig som i §1. Vi innfører en utvalgsfunksjon hvor domenet er Mg([e];T : eêConst(L)) og som plukker ut nøyaktig ett element fra hver ekvivalensklasse på samme måte som i §1. Dernest defineres en I;0-modellstruktur m;T der

m;T = <*;T, D;T, f;T,£;T,<*f*;T(<m,n>)>/m,nêN/,G;T>

ved å la *;T være en formel i L og la D;T, f;T, £;T og <*f*;T(<m,n>)>/m,nêN/ være definert på samme måte som de tilsvarende størrelser i beviset for Teorem 1.1 i §1. L-morfien g;T fra L(D;T) over i £;T defineres også som i §1. Man bør imidlertid merke seg at denne L-morfien nå er en L-morfi fra et I;0-språk over i et annet I;0-språk og at størrelsene i modellstrukturen m;T er definert relativt til I;0-teorien T = ß(Δ,I;0,L).

Den eneste komponenten i m;T som vi nå må definere nærmere er funksjonen G;T. Vi gjør definisjonen av M;T fullstendig ved å definere G;T slik:

G;T = Mg(< g;T(F),∂([c;]) >: cêConst(L) & FêCFm(L) & T :– (c=μ(F)))

Det er lett å se at G;T er en funksjon med CFml(£;T) som domene og med verdiområdet inkludert i D;T. Vi skal vise at G;T er en-entydig. Anta derfor at <x,z>,<y,z>êG;T. Vi ønsker å vise at x = y. Fra definisjonen av G;T har man at det må finnes konstanter c,c' og formler F,F'êCFml(£;T) der vi har:

(1) z=∂([c]) & x= g;T(F) & T :– (c=μ(F)) og

(2) z=∂([c']) & y= g;T(F') & T :– (c'=μ(F'))

Fra de to første konjunktene i henholdsvis (1) og (2) følger at ∂([c])=∂([c']) og derfor at T :– c=c'. Dette impliserer sammen med de to siste konjunktene i (1) og (2) i lys av det faktum at A8 er et aksiom i T at:

(3) T :– μ(F) = μ(F').

Det følger at F må være en substitusjonsinstans av F' for ellers ville vi i kraft av A18 ha hatt T :– μ(F)≠μ(F') som strider mot (3). Dette er umulig siden T er konsistent. Følgelig må man ha, i lys av definisjonen av "substitusjonsinstans", at det finnes en formel H med distinkte fri variabler x;1,...x;j, som alle forekommer i H. Dessuten må det finnes konstanter c;1,...,c;j, c;1',...,c;j' slik at:

(4) H;(x;1,...,x;j)[c;1,...,c;j] = F

(5) H;(x;1,...,x;j)[c;1',...,c;j'] = F'

Fra (3), (4) og (5) og A19 må man ha at (6) T :– c;i = c;i' for i= 1,...,j. Det følger derfor at:

(7) g;T(c;i) = ∂([c;i]) = ∂([c;i']) = g;T(c;i') for i=1,...,j.

Men da har man ved hjelp av Lemma 2.3 i Kapittel III:

x = g;T(F)
= g;T(H;(x;1,...,x;j)[c;1,...,c;j])
= g;T(H);(x;1,...,x;j)[ g;T(c;1),...,g;T(c;j)]
= g;T(H);(x;1,...,x;j)[ g;T(c;1'),...,g;T(c;j')] pga. (9)
= g;T(H;(x;1,...,x;j)[c;1',...,c;j'])
= g;T(F') = y.

Dette viser at G;T, slik vi har definert denne funksjonen, er en-entydig.

Vi definerer tilslutt en valuasjon ∏;T assosiert med m;T og g;T som i §1, men selvfølgelig denne gangen relativt til I;0-teorien T. Til sist lar vi R;T være modellen definert ved: R;T = <m;T, g;T, ∏;T>.

R;T er en normal I;0-modell for L, men vi har dessverre ingen garanti for at den er en modell for teorien T. Vi skal derfor modifisere R;T til en seminormal I;0-modell R* for L som faktisk er en modell for T.

Vi betrakter konstantmengdene C1 og C2 definert ved:

C1 = Mg(∂([c]) : T :– Uc & (EF)(FêCFml(L) & T :– (c=μ(F)))
C2 = Mg(∂([c]) : T :– Uc & ¬(EF)(FêCFml(L) & T :– (c=μ(F)))

For hver konstant cêC2 innfører vi et helt nytt unært predikat P;c som ikke foreligger i L og utvider så £;T til £;(T,C2) ved å føye alle disse nye predikatene til £;T. Da vil W = CFml(L;(T,C2)) – CFml(L;T) være minst likemektig med C2. Det finnes derfor en funksjon med W som domene og C2 som verdiområde. Vi plukker ut en slik funksjon og kaller den G+. Vi definerer så en mengde
Z;<m,n>(c;1,...,c;m) der c;1,...,c;mêConst(L) og <m,n>êNXN ved å sette:

Z:<m,n>(c;1,...,c;m) = Mg(G: (Ec)(G ê(G+);-1"({∂([c]}) &
T :– t;<m,n>(c;1,...,c;m,c) &¬(EF)(FêCFml(L) &
T :– (c = μ(F)) & T :– T;<m,n>(c;1,...,c;m,F))))

Etter disse forberedelsene kan man nå definere en modell R* slik:

Vi definerer først en I;0-modellstruktur m* der

m* = <*, D*, f*,£*,<*f*;<m,n>>/<m,n>êNXN,G*>

ved å sette:

(i) * = *;T

(ii) D* = D;T

(iii) f* = f;T

(iv) £* = £;(T,C2)

(v) G* = (G;T U G+)

Videre defineres *f**;<m,n> ved at vi setter:

(vi) *f**;<m,n>(∂([c;1]),...,∂([c;m])) =
*f*;T(<m,n>)(∂([c;1]),...,∂([c;m]) U Z:<m,n>(c;1,...,c;m)

Det er ingen spesielle vanskeligheter med å verifisere at *f**;<m,n> definert på denne måten er veldefinert. Vi definerer så en L-morfi fra L(D*) over i £* ved å sette g* = g;T. Tilslutt defineres valuasjonsfunksjonen ∏* assosiert med m* og g* ved at setter ∏*(u) = ∏:T(u) om u er en konstant, en singulær term i snever forstand, et n-ært predikat for noe n≥1 eller et n-ært funksjonssymbol der n≥1.

Vi setter så R* = <m*,g*,∏*>. Dermed er modellen R* definert.

Det er lett å se at R* er en I;0-modell. Nå har man at X;(R*,L) = CFml(£;T) og derfor at:

(10) G*Ω(|R*|X X;(R*,L) = (G;TU G+) Ω (D;TX CFml(£;T) = G;T

og derfor at G*Ω(|R*|X X;(R*,L) er en-entydig.

Videre har man:

(11) G*"X(R*,L) Ω G*"(CFml(£*) – X;(R*,L))
= G*"CFml(£;T) Ω G*"(CFml(£(T,C2) – CFml(£;T)
= G*"CFml(£;T) Ω G*"W
= (G;T UG+)" CFml(£;T) Ω (G;T UG+)"W
= G;T"CFml(£;T) Ω (G+)"W
= C1 Ω C2 =ø

I lys av (10) og (11) kan man konkludere med at R* er en seminormal I;0-modell.

Vi skal nå bevise det følgende lemma:

**Lemma 2.2** La R* være definert som ovenfor. Anta F er en lukket formel i L, t en lukket term i L og c en konstant i L. Da gjelder:

(1) R;T(F) =1 <–> T :– F

(2) R;T(t) = ∂([c]) <–> T :– (t =c)

**Bevis:** Vi beviser påstanden ved induksjon på lengden av velformede uttrykk i L. Er t en konstant, en singulær term i snever forstand, en term av typen f(t;1,...,t;n), der f er et n-ært funksjonssymbol, eller en singulær term, er beviset nøyaktig som i beviset for Lemma 1.2 i §1. Man kan se på henholdsvis punkt (i), (ii), (iv) og (iii) i dette beviset. Vi må se særskilt på det tilfelle at t = μ(F) for en eller annen lukket formel F i L. Anta R*(μ(F)) = ∂([c]). Da har ved hjelp av definisjonen av R* at G*(g*(F)) = ∂([c]). I lys av definisjonene av G* og g* innebærer dette at:

(12) (G+UG;T)(g;T(F)) = ∂([c]).

Nå har man at g;T(F) er med i CFml(L;T). Det følger derfor i lys av definisjonen av G+ og G;T at (G+UG;T)(g;T(F)) = G;T(g;T(F)). Dette og (12) impliserer at

<g;T(F),∂([c])>êG;T. I lys av definisjonen av G;T må det nå finnes en konstant c' og en formel GêCFml(L) slik at:

(13) ∂([c]) = ∂([c])

(14) g;T(F) = g;T(G) og

(15) T :– c'=μ(F).

Fra (13) følger umiddelbart (16) T:– c=c' som sammen med (15), og det at A18 inngår i teorien T, gir en:

(17) T :– c=μ(F). Fra (14) og Lemma 2.2 i §2 i Kapittel III følger at det må finnes en formel H og konstanter k;1,...,k;q, k';1,...,k';q slik at:

(18) H;(x;1,...,x;q)[k;1,...,k;q] = F

(19) H;(x;1,...,x;q)[k';1,...,k';q] = G og der man dessuten har:

(20) g;T(k;j) = g;T(k';j) for j= 1,...,q.

Fra (17), (18), (19), (21) og det faktum at A7 og A4 er logiske aksiomer i T kan man slutte at T:– c= μ(F) som er det vi ønsker.

Anta på den annen side at T:– c= μ(F). Da er <g;T(F),∂([c])>êG;T i lys av definisjonen av G;T. Siden G;TΩG+ = ø har man derfor at

G*(g*(F)) = (G;TUG+)(g;T(F)) = G;T(g;T(F)) = ∂([c])

Men da R*(μ(F)) = ∂([c]) i lys av definisjonen av R*. Dette viser at satsen holder i det tilfelle at t=μ(F).

I de tilfellene der F enten er av formen P(t;1,...,t;n), for et eller annet n-ært ikke-logisk predikat P, eller er av formen (¬G), (G–>H) eller (Ax)G er beviset for Lemma 2.2 nøyaktig som beviset for Lemma 1.2 i §1. Man kan konsultere punktene (v),(vi), (vii) og (viii) i dette beviset.

Imidlertid må man betrakte separat de tilfellene at F er U(t) eller t;<m,n>(t;1,...,t;(m+1)) og der F = T;<m,n>(t;1,...,t;m,F). Dette gjøres under punkt (a) – (c) nedenfor.

(a) Anta F=U(t) og at R*(U(t)) =1. Da har man at R*(t)êRgn(G*) = C;1UC2 og derfor at det finnes en konstant c der:

(22) T :– R*(t) =∂([c]) og hvor

(23) T :– U(c)

Fra (22) følger i lys av induksjonshypotesen at T :– t=c. Dette og (23) impliserer siden A8 er et aksiom i T at T :– U(t) som er det vi ønsker.

Anta på den annen side at T :– U(t). Ved hjelp av A10 har man da at T :– (Ex)(x=t) forutsatt at x er et variabeltegn som ikke forekommer fritt i t. Siden T er en Henkin-teori følger at det må finnes en konstant c slik at T :– c=t. Dette og induksjonshypotesen gir oss at R*(t) = ∂([c]). Men fra antagelsen T :– U(t) og det at T:– c=t følger T :– U(c) og derfor at ∂([c])êC;1UC2 = Rgn(G*). Men fra dette følger R*(t)êRgn(G*) og følgelig at R*(U(t)) =1. Dette er hva vi ønsker.

(b) Anta F er t;<m,n>(t;1,...,t;(m+1)) og at R*(t;<m,n>(t;1,...,t;(m+1)))=1. Det følger da:

(24) R*(t;(m+1))êG*"(*f**;<m,n>(R*(t;1),...,R*(t;m)). Videre følger det at R*(t;j)êD* for j=1,...,m+1 og derfor at det finnes konstanter c;1,...,c;(m+1), slik at:

(25) R*(t;j) = ∂([c;j]) for j=1,...,m+1. Ved hjelp av induksjonshypotesen har man da:

(26) T :– t;j = c;j for j=1,..,m+1. Fra (24) og (25) følger:

(27) R*(∂([c;(m+1)]))êG*"(*f**;<m,n>(∂([c;1]),...,∂([c;m])) og derfor at det finnes en G slik at:

(28) ∂([c;(m+1)]) = G*(G) og

(29) Gê*f**;<m,n>(∂([c;1]),...,∂([c;m])). Vi skiller nå mellom to tilfelle:

Tilfelle (i): Anta <G,∂([c;(m+1)])>êG+. da har vi GêW. Fra (29) følger:

(30) Gê(*f*;T(<m,n>)(∂([c;1]),...,∂([c;m])) U Z;<m,n>(c;1,...,c;m)).

Man har åpenbart at *f*;T(<m,n>)(∂([c;1]),...,∂([c;m])) er inkludert i CFml(L;T). Men CFml(L;T)Ω W = ø og GêW. I lys av (30) må man da ha:

(31) GêZ;<m,n>(c;1,...,c;m)

Fra (31) og definisjonen av Z;<m,n> følger det at det må finnes en konstant c der man har:

(32) Gê(G+):-1(∂([c])) og

(33) T :– t;<m,n>(c;1,...,c;m,c)

Anta nå for reduktio ad absurdum at ¬ (T :– c=c;(m+1)). Da har man:

(34) ∂([c])≠∂([c;(m+1)]).

Fra vår hypotese i dette tilfellet har man Gê(G+);-1(∂([c;(m+1)]). Men dette, (32) og (34) gir en en motsigelse siden G+ er en funksjon. Man har derfor :

(35) T :– c=c;(m+1) Fra (26), (33) og (35) har man i lys av A8 at det vi ønsker nemlig: T :– t;<m,n>(t;1,....,t;(m+1)).

Tilfelle (ii): Anta (36) <G,∂([c;(m+1)])>êG;T. Det følger at GêCFml(L;T). Videre følger fra (29) at:

(37) Gê (*f*;T(<m,n>)(∂([c;1]),...,∂([c;m])) U Z;<m,n>(c;1,...,c;m)).

Siden Z;<m,n>(c;1,...,c;m)) Inkl W og CFml(L;T)ΩW=ø følger det at Gê *f*;T(<m,n>)(∂([c;1]),...,∂([c;m])). Da har man i lys av definisjonen av *f*;T at det må finnes en formel H i CFml(L) der man har:

(38) g;T(H) = G og

(39) T :– T;<m,n>(c;1,...,c;m,H)

Fra (36) og definisjonen av G;T følger det at det må finnes en konstant c og en formel P slik at

(40) ∂([c;(m+1)])=∂([c])

(41) T :– c=μ(P)

(42) G = g;T(P).

Fra (38) og (42) har man at g;T(P) = g;T(H) og derfor i følge Lemma 2.2 i §2 i Kapittel III at det må finnes en formel P' og konstanter k;1,...,k;q, k';1,...,k;'q (q≥0) slik at:

(43) P';(x;1,...,x;q)[k;1,...,k;q] = H

(44) P';(x;1,...,x;q)[k';1,...,k';q] = P og der man dessuten har:

(45) g;T(k;j) = g;T(k';j) for j=1,...,q.

Fra (45), definisjonen av g;T og ∂ følger:

(46) T :– k;j=k';j for j=1,...,q.

Fra (39), (43), (44) og (46) følger, i lys av det at A7 og A4 er aksiomer i T at

(47) T :– T;<m,n>(c;1,..,c;m,P). Fra dette og det faktum at A16 er et aksiom i T følger:

(48) T :– t;<m,n>(c;1,...,c;m,μ(P)).

Fra (40) har man T :– c;(m+1)=c som sammen med (48) og (41) gir en T :– t;<m,n>(c;1,...,c;(m+1)). I lys av (26) og A8 følger det fra dette T :– t;<m,n>(t;1,...,t;(m+1)) som nettopp er det vi ønsker.

Anta på den annen side at T :– t;<m,n>(t;1,...,t;(m+1)). Da har man i kraft av aksiom A18 at T :– (Ex)(x=t;i) for i=1,..,m+1 forutsatt at x ikke forekommer fri i noen av t;i'ene. Siden T er en Henkin-teori må det følgelig finnes konstanter c;1,..,c;(m+1) slik at T :– c;j= t;j for j=1,...,m+1. Fra dette og antagelsen om at T :– t;<m,n>(t;1,...,t;(m+1)) følger:

(49) T :– t;<m,n>(c;1,...,c;(m+1))

Videre må vi ved hjelp av induksjonshypotesen ha at:

(50) R*(t;j) =∂([c;j]) for j=1,...,m+1.
Vi skiller nå mellom to tilfelle:

Tilfelle (i): Det finnes en formel G der man har:
(51) T :– c;(m+1) = μ(G) og dessuten
(52) T :– T;<m,n>(c;1,...,c;m,G). I så fall må man ha at
(53) <g*(F), ∂([c;(m+1)])> êG;T Inkl G*. Fra (52) og definisjonen av $f$*;<m,n> følger:
g*(F)ê $f$;T(<m,n>)(∂([c;1]),...,∂([c;m])) Inkl $f$*;<m,n>(∂([c;1]),...,∂([c;m]))
Dette (50) og (53) gir oss så det vi ønsker: R*(t;<m,n>(t;1,...,t;(m+1)))=1.

Tilfelle (ii): Anta nå at det ikke finnes noen formel GêCFml(L) slik at (51) og (52) holder. Anta for reduktio ad absurdum at det finnes HêCFml(L) slik at
T :– c;(m+1)=μ(H). I lys av (49) og aksiom A16 følger da at
T :– T;<m,n>(c;1,...,c;m,H) som strider mot det vi antar i dette tilfellet. Vi har derfor :
(54) ¬(EH)(HêCFml(L) & T :– c;(m+1)=μ(H))
Fra (49) og aksiom A17 har man:
(55) T :– U(c;(m+1))
(54) og (55) impliserer at ∂([c;(m+1)])êC2. Da har man at ∂([c;(m+1)])êRgn(G+). Derfor har vi at det finnes en formel P der:
(56) Pê(G+);-1(∂([c;(m+1)])). Fra (49), (56) og hypotesen i dette tilfellet følger at PêZ;<m,n>(c;1,...,c;m) Inkl $f$*;<m,n>(∂([c;1]),...,∂([c;m])). Fra (56) følger (G*)(P) = ∂([c;(m+1)]). Man må derfor ha at
∂([c;(m+1)])êG*"($f$*;<m,n>(∂([c;1]),...,∂([c;m]))) I lys av (50) gir dette en at R*(t;<m,n>(t;1,...,t;(m+1)))=1 i kraft av definisjonen av R*(t;<m,n>)

(c) Vi ser på det tilfelle der F = T;<m,n>(t;1,...,t;n,G). Som under punkt (ix) i beviset for Lemma 1.2 i §1 kan man bevise:
(57) g;T(G) ê $f$;T(<m,n>)(∂([c;1]),...,∂([c;m]) <–> T :– T;<m,n>(c;1,...,c;m,G)
om G er en formel i L og c;1,...,c;m er konstanter i L.
Anta nå at R*(T;<m,n>(t;1,...,t;m,G)= 1. Da følger per definisjon:
(58) g*(G)= g;T(G)ê$f$*;<m,n>(R*(t;1),...,R*(t;m))
Man må ha at R*(t;i)êD* for i=1,..,m og derfor at det finnes konstanter c;1,...,c;m slik at:
(59) R*(t;i) = ∂([c;i]) for i=1,...,m. I lys av induksjonshypotesen impliserer dette:
(60) T :– t;i = c;i for i=1,...,m. (58) og (59) gir oss:
(61) g;T(G)ê $f$*;<m,n>(∂([c;1]),...,∂([c;m])) Inkl
$f$;T(<m,n>)(∂([c;1]),...,∂([c;m])) U Z;<m,n>(c;1,...,c;m)
Siden g;T(G)êCFml(L;T) og Z;<m,n>(c;1,...,c;m) Inkl W og CFml(L;T)ΩW =ø følger at:
(62) g;T(G)ê$f$;T(<m,n>)(∂([c;1]),...,∂([c;m])) . (57) og (62) gir en:
T :– T;<m,n>(c;1,...,c;m,G) som i lys av (60) og det at aksiom A9 inngår i T impliserer T :– T;<m,n>(1;1,...,t;m,G).
Anta på den annen side at T :– T;<m,n>(t;1,...,t;m,G). Da må vi, i kraft av aksiom A11 og det at T er en Henkin-teori, ha at det finnes konstanter c;1,...,c;m slik at T :– t;i=c;i for i=1,...,m. I lys av induksjonshypotesen impliserer dette at
(63) R*(t;i) =∂([c;i]) for i=1,...,m.
Videre må man ha at T :– T;<m,n>(c;1,...,c;m,G) og derfor i lys av (57) at
g;T(G) ê $f$;T(<m,n>)(∂([c;1]),...,∂([c;m]) Inkl $f$*;<m,n>(R*(t;1),...,R*(t;m)) i lys av (63) og definisjonen av $f$*;<m,n>. Siden g*(G)=g;T(G) følger det at R*(T;<m,n>(t;1,...,t;m,G)= 1.
Dette avslutter vårt bevis for Lemma 2.2

Vi skal nå vise at R* oppfyller kravet:

$f$;<m,n>(R*)(x;1,...,x;m)Ω X;(R*,L) Inkl Tr;L(R*)

om x;1,...,x;m er med i D* og <m,n> er indeksen til en streng intensjonal operator. Anta derfor at x;1,...,x;mêD* og at

g*(F)ê$f$;<m,n>(R*)(x;1,...,x;m)Ω X;(R*,L)

Siden X;(R*,L) = CFml(L;T) følger i lys av definisjonen av $f$;<m,n>(R*) at

(64) g*(F)=g;T(F)ê$f$;T(<m,n>)(x;1,...,x;n).

Siden x;1,..,x;mêD*=D;T må det finnes konstanter c;1,...,c;m slik at x;i=∂([c;i]) for i=1,...,m. Dette og (64) gir oss i lys av (57) at T :– T;<m,n>(c;1,...,c;m,F). Siden <m,n> er indeksen til en streng intensjonal operator har man da ved hjelp av A20 at T :– F. Ved hjelp av Lemma 2.2 følger da R*(F)=T. Det følger fra dette at kravet er oppfylt.

Vi kan nå fullføre beviset for Teorem 2.1: La T;0 = ß(Δ;0,J;0,L;0) være en konsistent I;0-teori i et I;0-språk L;0. Vi utvider L;0 med spesielle konstanter til et språk L = (L;0);c og utvider Δ;0 til en mengde Δ' Inkl Fml((L;0);c) ved å føye til alle de spesielle aksiomene for de spesielle konstantene i (L;0);c slik at vi får en I;0-teori T;c = ß(Δ',J;0,L). Denne prosedyren ble beskrevet i Kapittel III. T;c er ved konstruksjon en Henkin-teori og er ifølge Lemma 3.8 i Kapittel III en konservativ utvidelse av T;0. Den må følgelig være konsistent. I følge Teorem 3.9 i Kapittel III finnes det nå en komplett teori T = ß(Δ,J;0,L) der Δ' Inkl Δ. T må åpenbart være en Henkin-teori. Vi definerer nå med utgangspunkt i T, R* slik som beskrevet ovenfor. Vi har da R* := T. For er FêT har man at T :– F. Da følger det at T :– F' der F' er den universelle lukningen av F. Ved hjelp av Lemma 2.2 har man da R*(F')=1 og derfor R* := F. Ved hjelp av Lemma 3.2 i Kapittel III kan man nå slutte at R*|L;0 er en modell for T;0.

Dette avslutter vårt bevis for Teorem 2.1. **Q.E.D.**[21]

## §3 Kompakthet. Supplerende bemerkninger.

Det følgende teorem er en konsekvens av Teorem 1.1 i §1:

**Teorem 3.1** (a) La T = ß(Δ;J;0,L) være en J;0-teori i L. Da har vi at FêT hvis og bare hvis enhver J;0-modell R for Δ er en modell for F, dvs. hvis og bare hvis man har: R:= Δ –> R:=F for enhver J;0-modell R.

(b) Th(J;0,L) = Val;L(Mod;(J;0)(L))

---

[21] Kutter man vekk fra systemet I;0 aksiomskjemaene A18 og A19 får man et system som man kunne kalle I;0-. Det er lett å se at dette systemet er komplett for klassen av alle I;0-modeller R som tilfredstiller kravet :

(1) Er GêX(R,L) & FêCFml(£(R)) & G(R)(F) = G(R)(G) &
Fê$f$;<m,n>(R)(x;1,...,x;n). –> Gê;<m,n>(R)(x;1,...,x;n)

Det er ikke så vanskelig å vise at systemet I;0- er gyldig med hensyn på denne klassen av modeller. Fullstendighetsbeviset er som for I;0. Faktisk konstruerer vi en kanonisk modell R* nøyaktig som ovenfor. Det er så lett å vise at denne tilfredstiller kravet (1). At R* er en modell for T bevises så ordrett som for I;0 i det man nå selvfølgelig forutsetter at T er en konsistent, komplett I;0- Henkin-teori. Dette går fordi aksiomskjemaene A18 og A19 bare ble brukt til å bevise at G;T var en-entydig og ikke ble brukt senere i beviset. Vi kan også bevise kompletthet til I;0- når vi istedet for kravet (1) ovenfor bruker det noe sterkere kravet:

(2) Er F,GêCFml(£(R)) & G(R)(F) = G(R)(G) &
Fê$f$;<m,n>(R)(x;1,...,x;n). –> Gê;<m,n>(R)(x;1,...,x;n)

Dette er det meget lett å vise siden det er greit å påvise at R*, slik som den er konstruert i fullstendighetsbeviset ovenfor ikke bare tilfredsstiller kravet (1), men også kravet (2).

**Bevis:** Punkt (b) er en umiddelbar følge av punkt (a). Kondisjonalen mot høyre er en umiddelbar følge av gyldighetsteoremet, Teorem 2.5 i §2 i Kapittel III. Anta ¬(FêT). Da har vi i lys av Korollar 3.7 i §3, Kapittel III, at T'=ß(ΔU{¬F'},J;0,L) er konsistent. (F' er den universelle lukningen av F). Ved hjelp av Teorem 1.1 i §1 har da T' en modell R slik at R := T. Da må man ha at R:= Δ og R:= (¬F'). Fra det siste følger åpenbart ¬(R:= F). Dette strider imidlertid mot de andre komponenten i bikondisjonalen i punkt (a). **Q.E.D.**

På nøyaktig samme måte som man kan utlede Teorem 3.1 fra Teorem1.1 i §1, kan man utlede det følgende teorem fra Teorem 2.1 i §2:

**Teorem 3.2** (a) La T = ß(Δ;I;0,L) være en I;0-teori i L. Da har vi at FêT hvis og bare hvis enhver I;0-modell R for Δ er en modell for F, dvs. hvis og bare hvis man har: R:= Δ –> R:=F for enhver I;0-modell R.

(b) Th(I;0,L) = Val;L(Mod;(I;0)(L))

Det bør bemerkes at vi har at det følgende kompakthetsteorem holder:

**Teorem 3.3** La T=ß(Δ,J;0,L) være en J;0-teori i L. Da har T en modell hvis og bare hvis enhver teori T'=ß(Δ',J;0,L) der Δ' er en endelig mengde inkludert i Δ har en modell.

**Bevis:** Kondisjonalen mot høyre er opplagt. Anta T ikke har noen modell. I lys av kompletthetsteoremet for J;0 er da T=ß(Δ,J;0,L) inkonsistent. Dette innebærer at det finnes et bevis for F&¬F i L ut fra Δ. I dette beviset kan bare et endelig antall av formlene i Δ forekomme. La Δ' være disse formlene. Da er også åpenbart T'=ß(Δ',J;0,L) inkonsistent. I lys av gyldighetsteoremet ville da en modell for T' også være en modell for F&¬F. Men det er umulig. Følgelig har ikke T' noen modell. **Q.E.D.**

Det følgende teorem er helt analogt med Teorem 3.3, men angår I;0:

**Teorem 3.4** La T=ß(Δ,J;0,L) være en I;0-teori i L. Det finnes da en seminormal I;0-modell R slik at R:= T hvis og bare hvis man har for enhver I;0-teori T'=ß(Δ',I;0,L) der Δ' er en endelig mengde inkludert i Δ at det finnes en seminormal I;0-modell R' der R':= T'.

**Bevis:** Beviset er helt analogt med det som ble gitt for Teorem 3.3. Men i stedet for å benytte Teorem 1.1 i §1 bruker man nå Teorem 2.1 i §2. **Q.E.D.**

Det kan være passende å avslutte med å bemerke to ting:

For det første er det et åpent spørsmål om Teorem 2.1 og Teorem 3.2 holder om man erstatter uttrykket "seminormal I;0-modell" med "normal I;0-modell". Det er å håpe at en løsning på dette problemet kunne bidra til en noe dypere innsikt i våre semantiske teorier og at man kunne finne en løsning på det.

For det andre vil vi bemerke følgende:
Klassen av de seminormale I;0-modellene R for et I;0-språk L der vi lar ∏(R) være definert ved:

(1) ∏(R)(T;<m,n>(t;1,...,t;m,F)=1 <–>.
g(R)(F)ê*f*;<m,n>(R)(∏(R)(t;1),...,∏(R)(t;m)) & R(F)=1

om <m,n> er indeksen til en streng intensjonal operator, t;1,...t;n er lukkede termer i L(R) og

F er en lukket formel i L(R) betegner vi med Sem*;(I;0)(L). Systemet I;0 utvidet med skjemaet:

A21 T;<m,n>(x;1,...,x;n,F) <–> (t;<m,n>(x;1,...,x;n,μ(F)) & F)

når <m,n> er indeksen til en streng intensjonal operator, og med den forandring at vi i A16 krever at <m,n> skal være indeksen til en svak intensjonal operator, kalles for I;0*. Det er lett å vise at alle I;0*- teoremene er gyldige i klassen Sem*;(I;0)(L).

Vi kan vise at I;0* er sterkt komplett, dvs. at dersom T'=ß(Δ',I;0*,L') er en konsistent I;0*-teori i L' så finnes det en modell R'êSem*;(I;0)(L) slik at R':= T'.[22]

La oss bruke h for indeksmengden til de strenge intensjonale operatorene. Kompletthetsbeviset for I;0* er som for I;0, med med noen modifikasjoner.

Vi definerer en modell R* som i fullstendighetsteoremet for I;0. Men er <m,n>êh må $f$*;<m,n> redefineres. Vi setter i dette tilfellet:

(1) Z:<m,n>(c;1,...,c;m) = Mg(G: (Ec)(G ê(G+);-1"({∂([c;)}) &
T :– t;<m,n>(c;1,...,c;m,c) &¬(EF)(FêCFml(L) &
T :– (c = μ(F)) & T :– F)))

Er <m,n>ê(NXN–h) lar vi $f$*;<m,n> og Z;<m,n> være definert som før. Vi definerer videre Y;<m,n> ved å sette:

(2) Y:<m,n>(c;1,...,c;m) = Mg(g;T(F): FêCFml(L) &
(Ec)(T:– t;<m,n>(c;1,...c;m,c) & T: c=μ(F) & ¬(T:– F)))

Man kan så definere $f$*;<m,n> om <m,n>êh ved:

(3) $f$*;<m,n>(∂([c;1]),...,∂([c;m])) =
$f$;T(<m,n>)(∂([c;1]),...,∂([c;m]) U
Z:<m,n>(c;1,...,c;m) U Y:<m,n>(c;1,...,c;m)

Dermed er modellen R* fullstendig definert.

Det bør bemerkes at alle komponentene i R* er definert relativt til en komplett Henkin I;0*-teori i L, T=ß(Δ,I;0*,L), der L er en utvidelse av L med nye spesielle konstanter, og Δ' Inkl Δ. Man kan nå vise at (4) R*:= T. Det vil si at vi beviser ved induksjon:

(5) R;T(F) =1 <–> T :– F
(6) R;T(t) = ∂([c]) <–> T :– (t =c)

om F er en lukket formel i L og t er en lukket term i L. Beviset for disse påstandene er nøyaktig som i tilfellet med I;0 unntatt når
F = T;<m,n>(t;1,...,t;m,G) der <m,n> er indeksen til en streng intensjonal operator. I dette tilfelle må man benytte seg av $f$*;<m,n> når denne er definert som ved (3). Gitt (4) er det lett å vise R*|L' := T' som er det vi ønsker.

Vi har nå nådd det som var vårt hovedmål i dette kapitlet, nemlig å vise at J;0 og I;0 er fullstendige med hensyn på henholdsvis klassen av J;0-modeller og klassen av seminormale I;0-modeller. I det neste kapitlet skal vi studere utvidelser av minimalsystemene I;0 og J;0 og

[22] Det er et åpent spørsmål om det er mulig å finne en troverdig tolkning av I;0 inn i I;0*. Vi har ikke vært i stand til å avgjøre dette spørsmålet, men har heller ikke funnet noe som viser at det er umulig.

bevise noen temmelig generelle fullstendighetsteoremer om slike utvidelser.[23]

[23] Vi kalle systemet I;0* minus aksiomskjemaene A18 og A19 for I;0*-. Dette systemet forholder seg til I;0* som systemet I;0- forholder seg til I;0. Vi kaller klassen av de I;0-modellene der de strenge intensjonale operatorene blir evaluert på følgende måte:

R(T;<m,n>(t;1,...,t;m,F)=1 <–> (g(R)(F)ê*f*;<m,n>(R)(x;1,...,x;n) & R(F)=1)

om <m,n> er indeksen til en streng intensjonal operator for Mod*;(I;0)(L). Vi lar P(L) være klassen av alle de modeller RêMod*;(I;0)(L) som oppfyller kravet:

(1) F,GêCFml(£(R)) & G(R)/F)=G(R)(G) & Fê*f*;<m,n>(R)(x;1,...,x;n).–> Gê*f*;<m,n>(R)(x;1,...,x;n)

Man kan nå lett vise at I;0*- er komplett med hensyn på P(L), dvs. at dersom T er en konsistent I;0*- -teori i L så finnes det en RêP(L) slik at R := T og der vi har Th(I;0*-,L) Inkl Val;L(P(L)). Beviset er en modifikasjon av fullstendighetsbeviset for I;0*. Vi konstruerer en I;0*--modell R* som i fullstendighetsbeviset for I;0* i det vi definerer Z;<m,n>(c;1,...,c;m) og Y;<m,n>(c;1,...,c;m) som ovenfor når <m,n> er indeksen til en streng intensjonal operator. Man kan så lett verifisere at R* oppfyller kravet (1). Man beviser at R* er en modell for T nøyaktig som i fullstendighetsbeviset for I;0*. La nå I;0*- utvidet med slutningsreglen :– (F<–>G) –> :– μ(F)=μ(G) kalles for I;0(P). Dette systemet kan man vise at er komplett med hensyn på de modellene RêP(L) som oppfyller kravet:

(2) (F–>G)êTh(I;0(P),£(R)) –> G(R)(F) = G(R)(G).

Beviset for dette skulle ikke by på spesielle problemer. Det bør nevnes at vi kan studere utvidelser av I;0(P) av samme type som dem vi skal studere i Kapittel V og VII og på samme måte som der bevise temmelig generelle kompletthetsteoremer.

# Kapittel V

Generelle fullstendighetsresultater I

## §1 Normale syntaktiske operasjoner.

Vi skal i dette kapitlet studere utvidelser av minimalsystemene I;0 og J;0. Vi trenger imidlertid en del syntaktiske begreper. Disse begrepene vil bli definert først.

(I;0)* sto for klassen av alle I;0-språk.[24] Definer en ekvivalensrelasjon ≈;I over (I;0)* ved å sette at <L,L'>ê≈;I hvis og bare hvis språket L har det samme logiske vokabularet som språket L'. Vi skal i dette kapitlet tenke oss at vi har valgt ut et element i kvotientmengden til (I;0)* med hensyn på ekvivalens-relasjonen ≈;I. Denne ekvivalensmengden skal vi betegne med "I". Vi har altså at Iê [(I;0)*/≈;I] i det vi generelt betegner kvotientmengden til en mengde X med hensyn på en ekvivalensrelasjon E med "[X/E]". Likeledes sto (J;0)* for klassen av alle J;0-språk. Vi definerer en ekvivalensrelasjon ≈;J over denne mengden ved å stipulere at <L,L'>ê≈;J hvis og bare hvis L og L' er J;0-språk og L har nøyaktig det samme logiske vokabularet som L'. Også i forbindelse med (J;0)* skal vi tenke oss at vi har valgt ut en ekvivalensklasse fra (J;0)* med hensyn på relasjonen ≈;J. Denne skal vi kalle "J". Man har derfor at Jê[(J;0)*/≈;J]. J skal vi tenke oss at er valgt ut en gang for alle i dette kapitlet. I det følgende vil bokstaven "H" bli brukt som plassholder for enten "I" eller "J". Overalt hvor det derfor står "H" skal man altså systematisk kunne sette inn bokstaven "I" eller, om man ønsker det, bokstaven "J".

Vi skal bruke "ETerm(L)" for å betegne klassen av alle de enkle termene i L. De enkle termene i L er konstantene i L og variabeltegnene i L.

Vi setter nå:

$$B;<n,m>(L) = Mg(<F;1,...,F;n,t;1,...,t;m>: F;1,...,F;nêFml(L) \;\&\; t;1,...,t;mêETerm(L))$$

Videre defineres:

$$Q;<n,m>(I) = UN/LêI/(B;<n,m>(L) \times Fml(L))$$

Man definerer uttrykket "Q;<n,m>(J)" på nøyaktig samme måte. Det er bare nødvendig å bytte ut "I" i definisjonen ovenfor med "J".

Uttrykket "syntaktisk operasjon ¥ over I med karakteristikk <n,m> er nå definert slik:

**Definisjon 1.1** Med en *syntaktisk operasjon ¥ over I med karakteristikk <n,m>* forstår vi en funksjon ¥ der man har at ¥ Inkl Q;<n,m>(I), n≥1, m≥0 og som ellers oppfyller følgende krav:

(i) Dom(¥) Inkl UN/LêI/(B;<n,m>(L))

(ii) Rgn(¥) Inkl UN/LêI/(Fml(L))

(iii) Har man <F;1,...,F;n,t;1,...,t;m> êB;<n,m>(L) der L er et språk i I. <F;1,...,F;n,t;1,...,t;m> êDom(¥) og F;iêCFm(L) for i=1,...,n og t;jêConst(L) for j=1,...,m så gjelder:

¥(F;1,...,F;n,t;1,...,t;m) êCFml(L)

Vi definerer uttrykket "syntaktisk operasjon ¥ over J med karakteristikk <m,n>" på nøyaktig samme måte, men erstatter i definisjonen ovenfor overalt bokstaven "I" med "J". Skriver man definisjonen helt ut blir resultatet:

**Definisjon 1.2** Med en *syntaktisk operasjon ¥ over J med karakteristikk <n,m>* forstår vi en funksjon ¥ der man har at ¥ Inkl Q;<n,m>(J) og som ellers oppfyller følgende krav:

[24] Se §1.2.1 i Kapittel I.

(i) Dom(¥) Inkl UN/LêJ/(B;<n,m>(L))
(ii) Rgn(¥) Inkl UN/LêJ/(Fml(L))
(iii) Har man <F;1,...,F;n,t;1,...,t;m> êB;<n,m>(L) der L er et språk i J. <F;1,...,F;n,t;1,...,t;m> êDom(¥) og F;iêCFm(L) for i=1,...,n og t;jêConst(L) for j=1,...,m så gjelder:

¥(F;1,...,F;n,t;1,...,t;m) êCFml(L)

Eksempler: (a) ¥1 = UN/LêI/(Mg(<<F,F–>G>,G>: F,GêFm(L))) er et eksempel på en syntaktisk operasjon over I med karakteristikk <2,0>.
(b) ¥2 = UN/LêI/(Mg(<<T;<1,0>(t,F), T;<1,0>(t,F–>G), t>, T;<1,0>(t,G)>: F,GêFml(L) & têETerm(L))) er et eksempel på en syntaktisk operasjon over I med karakteristikk <2,1>.

Vi skal definere hva som menes med at en syntaktisk operasjon er regulær, substitusjonsinvariant og korrekt. Uttrykkene "regulær", "substitusjonsin-variant" og "korrekt" er selvfølgelig tekniske begreper hvis meningsinnhold er fastlagt ved de definisjonene vi nå etterhvert skal presentere. La oss først se på hva som menes med regularitet:

**Definisjon 1.3** La ¥ være en syntaktisk operasjon over H med karakteristikk <n,m>. Da kaller vi ¥ *for regulær* hvis og bare hvis det følgende holder generelt:
La L;1, L;2êH og anta L;2 er et språk for L;1. Anta
(a) <F;1,..,F;n,t;1,..,t;m>êB;<n,m>(L;2)
(b) g er en L-morfi fra L;1 over i L;2.
(c) <F;1,..,F;n,t;1,..,t;m>êDom(¥) & <G;1,..,G;n,t;1',..,t;m'>êB;<n,m>(L;1) (d) g(G;i) = F;i for i=1,..,n og g(t;j') = t;j for j=1,...,m.
Da skal det finnes <G°;1,...,G°;n,t°;1,....,t°;m>ê(B;<n,m>(L) Ω Dom(¥)) slik at følgende holder:

(i) g(G°;i) = g(G;i) for i=1,...,n
(ii) g(t°;i) = g(t;'i) for j=1,...,n
(iii) ¥(F;1,...,F;n,t;1,...,t;m) = g(¥(G°;1,...,G°;n,t°;1,....,t°;m))

Dernest defineres hva som menes med *substitusjonsinvarians* i forbindelse med syntaktiske operasjoner:

**Definisjon 1.3** La ¥ være en syntaktisk operasjon over H med karakteristikk <n,m>. Da kaller vi ¥ *for substitusjonsinvariant* hvis og bare hvis det følgende holder generelt:
Anta:
(a) LêH
(b) <F;1,..,F:n,t:1,...,t;m>ê(B;<n,m>(L)Ω Dom(¥))
(c) x;1,...,x;j er distinkte variabler i L og e;1,...,e;j og e;1',...,e;j' er sekvenser av konstanter i L der alle ledd i den siste er distinkte.
(d) y;1,...,y;j er en sekvens av variabler i L der ingen forekommer i noen av F;1,...,F;n,t;1,...,t;m eller i ¥(F;1,...,F;n,t;1,...,t;m).
Under disse forutsetningene skal man ha:
(i) (¥(F;1,...,F;n,t;1,...,t;m));(x;1,...,x;j)[e;1,...,e;j] =
¥(F°;1,...,F°;n,t°;1,...,t°;m) der
F°;k = (F;k);(x;1,...,x;j)[e;1,...,e;j] for 1≤ k ≤n og
t°;p = (t;p);(x;1,...,x;j)[e;1,...,e;j] for 1≤ p ≤ m.

(ii) (¥(F;1,...,F;n,t;1,...,t;m));(e;1',...,e;j')[y;1,...,y;j] =

¥(F°;1,...,F°;n,t°;1,...,t°;m) der
F°;k = (F;k);(e;1',...,e;j')[y;1,...,y;j] for $1 \leq k \leq n$ og
t°;p = (t;p);(e;1',...,e;j')[y;1,...,y;j] for $1 \leq p \leq m$.

Vi definerer så hva som menes med at en syntaktisk operasjon er *korrekt*. Dette skjer ved:

**Definisjon 1.4** La ¥ være en syntaktisk operasjon over H med karakteristikk <n,m>. Da kaller vi ¥ *for korrekt* hvis og bare hvis det følgende holder generelt:
La L;1, L;2êH og anta L;2 er et språk for L;1. Anta
(a) g er en L-morfi fra L;1 over i L;2.
(b) <F;1,..,F;n,t;1,..,t;m>ê(Dom(¥) Ω B;<n,m>(L;1))
Under disse forutsetningene skal man ha:
g(¥(F;1,..,F;n,t;1,..,t;m)) = ¥(g(F;1),...,g(F;n), g(t;1),....,g(t;m))

Tilslutt defineres hva som menes med at en syntaktisk operasjon over H med karakteristikk <n,m> er *normal:*

**Definisjon 1.5**La ¥ være en syntaktisk operasjon over H med karakteristikk <n,m>. Da kalles ¥ for *normal* hvis og bare hvis den oppfyller følgende krav:
(i) ¥ er regulær, substitusjonsinvariant og korrekt
(ii) Er LêH og har man <F;1,..,F;n,t;1,..,t;m>ê(Dom(¥) Ω B;<n,m>(L)) og er y;1,...,y;m variabler som hverken forekommer i F;1,...,F;n,t;1,...,t;m eller ¥(F;1,..,F;n,t;1,..,t;m) så gjelder:
<F;1,...,F;n,y;1,...,y;m>êDom(¥)

## §2 Indeks-systemer og systemkarakteristikker.

I denne paragrafen skal vi introdusere ytterligere noen tekniske begreper. Det dreier seg om begrepet 'indekssystem' og begrepet 'systemkarakteristikk'. Begge begrepene er nokså kompliserte. Men har man en viss tålmodighet skulle det ikke være umulig å se poenget med disse begrepsdannelsene.

La oss først definere hva som menes med et n-ært indekssystem av grad m over H:

**Definisjon 2.1** Med et n-ært indekssystem av grad m over H forstås et tuple
a= <[<m,q;1>,....,<m,q;(n+1)>], F,¥,r>
der $n \geq 1$, $m \geq 0$ og de enkelte komponentene oppfyller de følgende krav:
(i) [<m,q;1>,....,<m,q;(n+1)>] er en sekvens av lengde n+1 der <m,q;k>êNXN for k= 1,...,n+1. Vi minner om at NXN er indeksmengen til de de intensjonale operatorene i språkene i H.
(ii) F er en funksjon der {1,...,n} er domenet og hvor verdiområdet er {0,1}.
(iii) r er et av tallene 0,1,2, mao. kreves: rê{0,1,2}
(iv) ¥ er en *normal* syntaktisk operasjon over H med karakteristikk <n,p> der vi krever at p=m om r=0 og p=0 om r=2.

Vi betegner mengden av alle n-ære indekssystemer av grad m over H med In;<n,m>(H). Mengden av *indekssystemer over H*, In(H) er definert ved:

In(H) = UN/$n \geq 1, m \geq 0$/(In;<n,m>(H))

Dette innebærer at x er et indekssystem over H hvis og bare hvis det finnes naturlige tall n,m der n≥1 og m≥0 slik at x er et n-ært indekssystem av grad m over H.

Er a et n-tuple bruker vi uttrykket (a);n for å betegne den n'te komponenten i a. Er aêIn;<n,m>(H) ser man at (a);1 kan oppfattes som en funksjon der Dom((a);1) = {1,....,n+1} og Rgn((a);1) Inkl NXN der man har at ((a);1(k));1 = ((a);1(k+1));1 = m for alle k= 1,...,n.

Med bredden til et indekssystem a over H forstår vi kardinaltallet til Rgn((a);1).

La oss så forklare hva som menes med en systemkarakteristikk over H. Dette er rett og slett en mengde med indekssystemer over H. Vi gir den følgende formelle definisjon:

**Definisjon 2.2** Vi sier at Ç er en systemkarakteristikk over H hvis og bare hvis Ç er en mengde av indekssystemer over H, dvs. Ç Inkl In(H).

## §3 Avgrensning av de aksiomene som er bestemt av en systemkarakteristikk.

La LêH og anta aê(In;<n,m>(H)). Vi skal definere en mengde av formler i L som er bestemt av indekssystemet a. Denne mengden av formler betegner vi med E(a,L). E(a,L) er bestemt på den følgende måte:

**Definisjon 3.1** Anta a= <[<m,q;1>,....,<m,q;(n+1)>], F,¥,r> er et n-ært indekssystem av grad m over H. Da er E(a,L) definert ved tilfelle ettersom r=0,1,2 på den følgende måte:

Tilfelle (i): r=0. Da har ¥ karakteristikk <n,m>. I så fall er Gê(E(a,L)) hvis og bare hvis G er

(1) T;<m,q;1>(x;1,...,x;m,F;1) & .... & T;<m,q;n>(x;1,...,x;m,F;n) –>
T;<m,q;(n+1)>(x;1,...,x;m, ¥(F;1,...,F;n,x;1,...,x;m))

for visse formler og variabler F;1,...,F;n,x;1,...,x;m i L og hvor man har at den k'te konjunkten i antesedenten i (1) er utelatt om F(k)=0 og der man dessuten har at

<F;1,...,F;n,x;1,....,x;n>ê(B;<n,m>(L) Ω Dom(¥))

Tilfelle (ii): r=1. Da har ¥ karakteristikk <n,p> for noe pêN. I så fall er Gê(E(a,L)) hvis og bare hvis G er

(1) T;<m,q;1>(x;1,...,x;m,F;1) & .... & T;<m,q;n>(x;1,...,x;m,F;n) –>
T;<m,q;(n+1)>(x;1,...,x;m, ¥(F;1,...,F;n,y;1,...,y;p))

for visse formler og variabler F;1,...,F;n,t;1,...,t;m,y;1,...,y;p i L og hvor man har at den k'te konjunkten i antesedenten i (1) er utelatt om F(k)=0 og der man dessuten har at

<F;1,...,F;n,y;1,....,y;p>ê(B;<n,p>(L) Ω Dom(¥))

Tilfelle (iii): r=2. Da har ¥ karakteristikk <n,0>. I så fall er Gê(E(a,L)) hvis og bare hvis G er

(1) T;<m,q;1>(x;1,...,x;m,F;1) & .... & T;<m,q;n>(x;1,...,x;m,F;n) –>
¬T;<m,q;(n+1)>(x;1,...,x;m, ¬¥(F;1,...,F;n))

for visse formler F;1,...,F;n i L og hvor man har at den k'te konjunkten i antesedenten i (1) er utelatt om F(k)=0 og der man dessuten har at

<F;1,...,F;n>ê(B;<n,0>(L) Ω Dom(¥))

Dette avslutter definisjonen av formelmengden E(a,L) der a er et indekssystem i L. Vi kaller E(a,L) for a-aksiomene i L.

La nå Ç være en systemkarakteristikk over H. La LêH. (Man bør huske på at "H" er plassholder for enten "I" eller "J". Konsulter i denne forbindelse §1).
Med Ç-aksiomene i L , Ax(Ç,L), forstår vi foreningsmengden av de diverse E(a,L) ettersom a gjennomløper Ç, mao:

Ax(Ç,L) = UN/aêÇ/(E(a,L)).

Dermed har vi introdusert de begrepene vi ønsket. Det er nå mulig å definere de utvidelsene av systemene J;0 og I;0 som vi ønsker å studere. Dette gjøres i den neste paragrafen.

## §4 Definisjon av systemene I:0[Ç] og J:0[Ç].

Vi skal nå beskrive utvidelser av minimalsystemene J;0 og I;0.

La Ç være en systemkarakteristikk over H, Vi bruker i det følgende "H;0" som plassholder for enten "J;0" eller "I;0". La LêH. Med H;0[Ç]-aksiomene i L forstås unionen av H;0-aksiomene i L og Ç-aksiomene i L dvs. :

Ax(H;0,L) U Ax(Ç,L).

Vi betegner H;0[Ç]-aksiomene i L med "Ax(H;0[Ç], L)". Med H;0[Ç] - teoremene i L , Th(H;0[Ç], L), forstår vi den minste formelmengden X i L der Ax(H;0[Ç],L) er inkludert i X og der X er lukket under modus ponens og universell generalisering. Med en H;0[Ç]-teori med aksiom mengde Δ forstår vi en mengde T Inkl Fml(L) der T =ß(Δ, H;0[Ç],L). Det bemerkes at ß(Δ, H;0[Ç],L) der Δ er en formelmengde i L og LêH er definert som de minste mengden X inkl Fml(L) der man har:

(i) ΔUAx(H;0[Ç],L) Inkl X

(ii) X er lukket under modus ponens og universell generalisering.

Vi bemerker at for enhver Δ Inkl Fml(L) der LêH finnes det en og bare en H;0[Ç]-teori i L med aksiommengde Δ. Er T = ß(Δ,H;0[Ç],L) kaller vi Δ for de ikke-logiske aksiomene i T. Ax(H;0[Ç],L) kalles for de logiske aksiomene i T.

Vi definerer predikatene "H;0[Ç]-bevis i L", "H;0[Ç]-bevis i L for F", "F er H;0[Ç]-bevisbar i L", "H;0[Ç]-bevis i L ut fra Δ", "H;0[Ç]-bevis i L for F ut fra Δ", "F er H;0[Ç]-bevisbar i L ut fra Δ" nøyaktig som i Kapittel III, §1, i det vi i disse definisjonene erstatter enhver forekomst av "I;0" med "H;0[Ç]" og forstår ved "H;0[Ç]-språk" det samme som "H;0-språk".

Vi bruker "(H;0[Ç],L) :– F" i stedet for "F er H;0[Ç]-bevisbar i L", og "(H;0[Ç],L,Δ) :– F" i stedet for "F er H;0[Ç]-bevisbar i L ut fra Δ" når det er passende. Er T=ß(Δ, H;0[Ç],L) skal vi også av og til skrive "T :– F" isteden for det mer klumsete uttrykket "(H;0[Ç],L,Δ) :– F". Det skulle da være klart at man har T :– F hvis og bare hvis FêT.

Videre bemerker vi at :

Th(H;0,L) Inkl Th(H;0[Ç],L) Inkl ß(Δ,H;0[Ç],L). D

Det er også lett å se at ß(Δ,H;0, L) Inkl ß(Δ,H;0[Ç],L) når Δ er en formelmengde i L og L er et språk i H.

Man skulle nå lett innse at Teorem 3.3 – Teorem 3.6 og Korollar 3.7 i Kapittel III, §3, dvs. henholdsvis deduksjonsteoremet, konstant-teoremet, reduksjons-teoremet, og reduksjonsteoremet for konsistens med korollar, holder om vi i hver av formuleringene i disse teoremene erstatter "S" med "H;0[Ç]" og forstår med et "H;0[Ç]-språk" det samme som et H;0-språk. Bevisene vil fremdeles i det vesentlige være som i Shoenfield [1], §3.3 og §4.1. Beviset for konstant-teoremet kan gjennomføres hovedsakelig som der, men vi merker oss at om FêAx(H;0[Ç],L), og mer spesielt om FêAx(Ç,L), og e;1,...,e;m er distinkte konstanter og y;1,...,y;m variabler som ikke forekommer i F så vil F;(e;1,...,e;m)[y;1,...,y;m] være med i

Ax(H;0[Ç],L), eller mer spesielt med i Ax(Ç;L), siden de syntaktiske operasjonene i ethvert indekssystem aêÇ er normale og derfor substitusjons-invariante. Det er dette forhold som gjør at man kan gjennomføre beviset for konstant-teoremet.

La T = ß(Δ,H;0[Ç],L) være en H;0[Ç]-teori i L. Vi definerer da hva som menes med at T er en Henkin-teori, og at T er en komplett teori, nøyaktig som i §3 i Kapittel III, men erstatter "S" med "H;0[Ç]" overalt i definisjonene.

Er T = ß(Δ,H;0[Ç],L) lar vi T;c være ß(Δ',H;0[Ç],L;c), der L;c er definert som i §3 i Kapittel III, og Δ' er Δ utvidet med alle de spesielle aksiomene for de spesielle konstantene i L;c. T;c er da en Henkin-teori som er konsistent om T er konsistent. Vi kan som i Shoenfield [1], §4.2 bevise de følgende to hjelpe-setninger:

**Lemma 4.1** La T = ß(Δ,H;0[Ç],L) være en H;0[Ç]-teori i L (LêH). Da er T;c en konservativ utvidelse av T.

**Lemma 4.2** La T = ß(Δ,H;0[Ç],L) være en konsistent H;0[Ç]-teori i L, der L er et H;0-språk. Da finnes det en komplett H;0[Ç]-teori ß(Δ',H;0[Ç],L) der
Δ Inkl Δ' Inkl Fml(L).

Vi har nå for enhver systemkarakteristikk Ç Inkl In(J) definert en logikk J;[Ç] som er en utvidelse av J;0. Tilsvarende har vi for hver Ç Inkl In(I) definert en logikk I;0[Ç]. I neste kapittel studerer vi nærmere semantikken for logikker av typen I;0[Ç] og J;0[Ç].

## §5 Avgrensning av spesielle klasser av modeller. Tillatte system-karakteristikker.

Vi definerer relasjonen CB;<n,m>(L) ved:

$$CB;\langle n,m\rangle(L) = Mg(\langle F;1,...,F;n,t;1,...,t;m\rangle: F;1,...,F;n\hat{e}CFml(L) \;\&\; t;1,...,t;m\hat{e}Const(L))$$

La R være en J;0-modell, med andre ord anta at RêMod;(J;0)(L) der LêJ. Anta a er et indekssystem som er med i In;<n,m>(J). Vi ønsker da å definere hva som menes med at n-tuple <x;1...,x;m>ê|R|^n tilfredstiller indekssystemet a i R. I symboler skriver vi "Sat(<x;1,...,x;m>,a,R)". Dette skjer ved den følgende definisjon:

**Definisjon 5.1** Anta RêMod;(J;0)(L) der LêJ. Anta
a= <[<m,q;1>,....,<m,q;(n+1)>], F*,¥,r>
er et n-ært indekssystem av grad m over J. Da er Sat(<x;1,...,x;m>,a,R), der <x;1,...,x;m>ê|R|^m, definert ved tilfelle, ettersom r=0,1,2, på den følgende måte:

Tilfelle (i): r=0. Da har ¥ karakteristikk <n,m>. I dette tilfelle setter vi at Sat(<x;1,...,x;m>,a,R) hvis og bare hvis man har at
¥(F;1,...,F;n,f(R)(x;1),..,f(R)(x;m)) ê$f$;<m,q(n+1)>(R)(x;1,...,x;n) dersom <F;1,...,F;n,f(R)(x1),..,f(R)(x;m)> ê(CB;<n,m>(£(R))Ω Dom(¥)) og F;kê$f$;<m,q(k)>(R)(x;1,...,x;m) for de k der F*(k) = 1.

Tilfelle (ii): r=1. Da har ¥ karakteristikk <n,p>. I dette tilfelle setter vi at Sat(<x;1,...,x;m>,a,R) hvis og bare hvis man har at
¥(F;1,...,F;n,c;1,..,c;p) ê$f$;<m,q(n+1)>(R)(x;1,...,x;n) dersom <F;1,...,F;n,c;1,..,c;p> ê(CB;<n,m>(£(R))Ω Dom(¥)) og F;kê$f$;<m,q(k)>(R)(x;1,...,x;n) for de

k der F*(k) = 1.

Tilfelle (iii): r=2. Da har ¥ karakteristikk <n,0>. I dette tilfelle setter vi at Sat(<x;1,...,x;m>,a,R) hvis og bare hvis man har at

¬[(¬¥(F;1,...,F;n))ê*f*;<m,q(n+1)>(R)(x;1,...,x;n)] dersom

<F;1,...,F;n> ê(CB;<n,0>(£(R))Ω Dom(¥)) og F;kê*f*;<m,q(k)>(R)(x;1,...,x;n) for de k der F*(k) = 1.

La RêMod;(J;0)(L). Anta aêIn(J). Da har man aêIn;<n,m>(J) for noen n,m der n≥1 og m≥0. Vi sier da at R tilfredsstiller a, Tilf(a,R), hvis og bare hvis Sat(<x;1,...,x;m>,a,R) for alle <x,1,....,x;m>ê|R|^m.

Vi sier at R tilfredsstiller Ç Inkl In(J), T(Ç;R), hvis og bare hvis man har at Tilf(a,R) for alle aêÇ. Klassen av alle de J;0-modeller R for L som tilfredsstiller Ç betegner vi med Mod;(J;0)(Ç,L).

Klassen av seminormale I;0-modeller for L, der LêI, betegner vi med "Sem;(I;0)(L). " La oss bruke "H;0" som plassholder for "I;0" og "J;0" i det følgende fordi det vi skal bemerke like mye gjelder for I;0-modeller som for J;0-modeller. La R være en H;0-modell for et H;0-språk L. Med £(g(R)) forstår vi det delspråket av £(R) som er bildet av L(R) over L-morfien g(R) i modellen R, dvs. det språket vi får når man fra £(R) kutter vekk:

(i) de predikatene som ikke er med i g(R)"(Pred;n(L(R)),
(ii) de funksjonssymbolene ikke er med i g(R)"(Funk;n(L(R)) og
(iii) de singulære termene i snever forstand som ikke er med i g(R)"Singterm(L(R)).

£(R) er altså en utvidelse av L(g(R)) med ikke-logiske symboler. Gitt denne definisjonen av £(g(R)) der R er en H;0-modell ser man at de lukkede formlene i £(g(R)) er formlene i X;(R,L) (Se definisjonen av "X;(R,L)" i Kapittel II, §5).

Anta nå at RêSem;(I;0)(L) der LêI. Anta aêIn;<n,m>(I). Da har man

a= <[<m,q;1>,....,<m,q;(n+1)>], F*,¥,r> for noen m,q;1,...,q;n+1, F*,¥ og r. Anta <x;1,...,x;m>ê|R|^m. Vi definerer "Sat(<x;1,...,x;m>,a,R)", "<x;1,...,x;n> tilfredsstiller a i R" nøyaktig som ved Definisjon 5.1 ovenfor, men erstatter alle forekomster av "CB;<n,m>(£(R))" med "CB;<n,m>(£(g(R))" og alle forekomster av henholdsvis "CB;<n,p>(£(R))" og "CB;<n,0>(£(R))" med henholdsvis "CB;<n,p>(£(g(R)))" og "CB;<n,0>(£(g(R)))".

Skrevet fullt ut får definisjonen av "Sat(<x;1,...,x;m>,a,R)" denne formen:

**Definisjon 5.2** Anta RêMod;(I;0)(L) der LêI. Anta

a= <[<m,q;1>,....,<m,q;(n+1)>], F*,¥,r>

er et n-ært indekssystem av grad m over J. Da er Sat(<x;1,...,x;m>,a,R), der <x;1,...,x;m>ê|R|^m, definert ved tilfelle, ettersom r=0,1,2, på den følgende måte:

Tilfelle (i): r=0. Da har ¥ karakteristikk <n,m>. I dette tilfelle setter vi at Sat(<x;1,...,x;m>,a,R) hvis og bare hvis man har at

¥(F;1,...,F;n,f(R)(x1),..,f(R)(x;m)) ê*f*;<m,q(n+1)>(R)(x;1,...,x;n) dersom

<F;1,...,F;n,f(R)(x1),..,f(R)(x;m)> ê(CB;<n,m>(£(g(R)))Ω Dom(¥)) og F;kê*f*;<m,q(k)>(R)(x;1,...,x;n) for de k der F*(k) = 1.

Tilfelle (ii): r=1. Da har ¥ karakteristikk <n,p>. I dette tilfelle setter vi at Sat(<x;1,...,x;m>,a,R) hvis og bare hvis man har at

¥(F;1,...,F;n,c;1,..,c;p) ê*f*;<m,q(n+1)>(R)(x;1,...,x;n) dersom

<F;1,...,F;n,c;1,..,c;p> ê(CB;<n,p>(£(g(R)))Ω Dom(¥)) og F;kê*f*;<m,q(k)>(R)(x;1,...,x;n) for de k der F*(k) = 1.

Tilfelle (iii): r=2. Da har ¥ karakteristikk <n,0>. I dette tilfelle setter vi at Sat(<x;1,...,x;m>,a,R) hvis og bare hvis man har at

¬[(¬¥(F;1,...,F;n))ê*f*;<m,q(n+1)>(R)(x;1,...,x;n)] dersom

<F;1,...,F;n> ê(CB;<n,0>(£(g(R)))Ω Dom(¥)) og F;kê*f*;<m,q(k)>(R)(x;1,...,x;n) for de k der F*(k) = 1.

Vi sier da at R tilfredsstiller a, Tilf(a,R), hvis og bare hvis Sat(<x;1,...,x;m>,a,R) for alle <x,1,....,x;m>ê|R]^m.

Vi sier at R tilfredsstiller Ç Inkl In(J), T(Ç;R), hvis og bare hvis man har at Tilf(a,R) for alle aêÇ. Klassen av alle de seminormale I;0-modellene R for L som tilfredsstiller Ç betegner vi med Sem;(I;0)(Ç,L)

La aêIn;<n,m>(J). Vi sier da at a er tillatt (med hensyn på J) hvis og bare hvis man har at Mod;(J;0)({a},L)≠ø og E(a,L) Inkl Val;L(Mod;(J;0)({a},L)) for alle LêJ.

Anta Ç Inkl In(J). Da er Ç tillatt med hensyn på J hvis og bare hvis Mod;(J;0)(Ç,L)≠ø for alle LêJ og a er tillatt med hensyn på J for alle aêÇ.

Tilsvarende for I;0-språk:

La aêIn;<n,m>(I). Vi sier da at a er tillatt (med hensyn på I) hvis og bare hvis man har at Mod;(I;0)({a},L)≠ø og E(a,L) Inkl Val;L(Mod;(I;0)({a},L)) for alle LêI.

Anta Ç Inkl In(I). Da er Ç tillatt med hensyn på I hvis og bare hvis Mod;(I;0)(Ç,L)≠ø for alle LêI og a er tillatt med hensyn på I for alle aêÇ.

Vi har nå definert alle de begrepene vi trenger for å kunne bevise to meget generelle kompletthetsteoremer. Vi formulerer og beviser dem i neste paragraf.

## §6 Et generelt fullstendighetsteorem for systemer av typen J:0[Ç].

I denne paragrafen skal vi gi et bevis for den følgende generelle sats:

**Teorem 6.1** La Ç Inkl In(J). Anta Ç er en tillatt systemkarakteristikk. Anta videre at L,L'êJ. Da har man at følgende påstander holder:

(a) La T = ß(Δ,J;0[Ç], L) være en J;0[Ç]-teori i L. Anta RêMod;(J;0)(Ç,L) og at R:= Δ. Da har man at R:= T.

(b) Anta T' = ß(Δ',J;0[Ç], L') er en konsistent J;0[Ç]-teori i L'. Da finnes det en modell R'êMod;(J;0)(Ç,L') slik at R' := T'.

**Bevis:** (a) Vi har at Ax(J;0,L) Inkl Val;L(Mod;(J;0)(L)) Inkl Val;L(Mod;(J;0)(Ç,L)) i lys av gyldighetsteoremet, dvs. Teorem 2.5 i §2 i Kapittel III. Derfor har man om man forutsetter at RêMod;(J;0)(Ç,L) at Val;L(Mod;(J;0)(Ç,L)) Inkl Val;L({R}). Dette impliserer at:

(1) Ax(J;0,L) Inkl Val;L({R}).

Siden vi etter forutsetningene har R := Δ har vi i lys av (1) at:

(2) R:= (Ax(J;0,L)U Δ

Nå har man åpenbart at:

(3) R:= F & R:= (F–>G) –> (R:= G & R:= (Ax)F)

Siden Ç er tillatt har vi om aêÇ at E(a,L) Inkl Val;L(Mod;(J0)({a},L). Nå har man Mod;(J;0)(Ç,L) Inkl Mod;(J;0)({a},L) og derfor, siden RêMod;(J;0)(Ç,L) at

E(a,L) Inkl Val;L(Mod;(J;0)({a},L)) Inkl Val;L(Mod;(J;0)(Ç,L) Inkl Val;L({R})

Men siden a var et vilkårlig element i Ç følger herav:

Ax(Ç,L) = UN/xêÇ/(E(x,L)) Inkl Val;L({R}).

Herav følger så (4) R:= Ax(Ç,L). Fra (2), (3) og (4) følger i lys av definisjonen av T=ß(Δ,J;0,L) at R:= T. Dette viser at punkt (a) i teoremet holder.

(b) La oss nå ta for oss den andre delen av satsen. Anta T' = ß(Δ',J;0[Ç], L') er en konsistent J;0[Ç]-teori i L' i det vi forutsetter at Ç er en tillatt systemkarakteristikk. I følge Lemma 4.1 og 4.2 i §4 kan T' utvides til en komplett Henkin-teori T=ß(Δ, J;0,L) der L er en utvidelse av L' med konstanter og
Δ' Inkl Δ. Vi konstruerer nå en modell R;T = <m;T, g;T,∏;T> hvor

m;T = <*;T, D;T, f;T,£;T,<*f*;T(<m,n>)>/<m,n>êNXN>

som er med i Mod;(J;0)(L) på nøyaktig samme måte som i fullstendighetsbeviset for J;0 i Kapittel IV. (Se beviset for Teorem 1.1 i Kapittel IV). Dette innebærer at vi innfører en eksvivalensrelasjon ≈;T over Const(L) ved å sette:

<c,c'>≈;T <–> T :– (c=c') om c,c'êConst(L). Vi velger så ut en utvalgsfunksjon ∂ som plukker ut en konstant fra hver ≈;t-ekvivalensklasse. Man har altså at Dom(∂) = [Cost(L)/≈;t] og at ∂(x)êx for alle xê[Cost(L)/≈;t]. De forskjellige komponentene i R;T og m;T defineres så nøyaktig som i beviset for Teorem 1.1 i Kapittel IV, unntatt at vi nå definerer dem relativt til teorien T=ß(Δ,J;0[Ç],L). På samme måte som i beviset for Teorem 1.1 kan man så bevise:

(1) R;T := T.

Faktisk vil beviset være ordrett som i §1 i Kapittel IV unntatt ved at vi erstatter enhver forekomst av "ß(Δ,J;0,L)" med ß(Δ,J;0[Ç],L). Man kan derfor oppfatte (1) som etablert.

Vi må imidlertid vise:

(2) R;TêMod;(J;0)(Ç,L)

Vi vil da ha at R;T|L' êMod;(J;0)(Ç,L') siden L bare er en utvidelse av L' med konstanter. Siden Lemma 3.1 og Lemma 3.2 i Kapittel III, §3 holder om "S" erstattes med "J;0[Ç]" vil det så følge at R;T|L' := T'. At Lemma 3.1 og 3.2 i Kapittel III holder med disse forandringene er lett å verifisere og beviset overlates til leseren.

Vi vil derfor ha bevist punkt (b) om vi kan gi et bevis for (2). Det vil være tilstrekkelig å bevise at T(Ç,R;T) dvs. at Tilf(a, R;T) for alle aêÇ. La derfor a være et vilkårlig indekssystem i Ç. Da er aêIn;<n,m>(J) for noen m≥0, n≥1. Det følger at:

a= <[<m,q;1>,....,<m,q;(n+1)>], F*,¥,r>

for noen q;1,...,q;(n+1), F*,¥,r der disse komponentene er beskrevet slik som tidligere. Vi må vise at:

(3) Sat(<x;1,...,x;m>,a,R;T) om <x;1,...,x;m>ê|R;T|^m.

Anta derfor for vilkårlig <x;1,...,x;m> at:

(4) <x;1,...,x;m>ê|R;T|^m

For å bevise (3) skiller vi mellom tre tilfelle ettersom r=0,1,2:

*Tilfelle (i):* r=0. Da har ¥ karakteristikk <n,m>. For å vise at (3) holder i dette tilfellet antar vi at :

(5) <F;1,...,F;n,f;T(x1),..,f:T(x;m)> ê(CB;<n,m>(£;T)Ω Dom(¥))

og dessuten at:

(6) F;kê*f*;T(<m,q(k)>)(x;1,...,x;m) for de k der F*(k) = 1

Vi ønsker å vise at

¥(F;1,...,F;n,f(R;T)(x;1),..,f(R;T)(x;m)) ê*f*;T(<m,q(n+1)>)(x;1,...,x;n)

Se i denne forbindelse definisjonen av "Sat" i §5.

Fra (4) og definisjonen av |R;T|^m = D;T^m følger det at det finnes konstanter c;1,...,c;mêConst(L) slik at:

(7) x;i = ∂([c;i]) for i=1,...,m. (6) og (7) gir en:

(8) F;kê*f*;T(<m,q(k)>)(∂([c;1]),...,∂([c;m])) for de k der F*(k) = 1

Fra (8) og definisjonen av "*f*;T(<m,q(k)>)" (Se Kapittel IV, §1) følger at det finnes formler G;k der vi har:

(9) F;k = g;T(G;k) og dessuten:

(10) T :– T;<m,q(k)>(c;1,...,c;m,G;k) for de k der F*(k)=1

Nå har man Fml(£;T) Inkl Fml(L) etter definisjonen av £;T. Videre har man i kraft av (5) og definisjonen av CB;<n,m>(£;T) at F;1,...,F;nêCFml(£:T). I følge Lemma 2.4 i Kapittel III har vi derfor:

(11) F;j = g;T(F;j) for de j der F*(j)=0 (1≤j ≤n)

Vi setter nå per definisjon:

(12.1) H;j = G;j om F*(j)= 1 (1≤j ≤n)

(12.2) H;j = F;j om F*(j)= 0 (1≤j ≤n)

Da har man i lys av (9) og (11) at det følgende holder:

(13) F;i = g;T(H;i) for i=1,...,n.

Videre har vi :

(14) g;T(c;s) = ∂([c;s]) = x;s = f;T(c;s) for s=1,...,m i kraft at (7) og definisjonene av g;T og f;T.

Siden a er et indekssystem må ¥ være en normal syntaktisk operasjon. Da må den være regulær. I lys av (5), (13) og (14) samt det faktum at £;T er et språk for L og g;T er en L-morfi fra L over i £;T må det derfor, siden ¥ er regulær, finnes

(15) <H';1,...,H';n,t';1,...,t';m> ê(B;<n,m>(L)Ω Dom(¥)) der man har:

(16) g;T(H';i) = g;T(H;i) for i=1,...,n og

(17) g;T(t';j) =g;(c;j) for j=1,...,m og dessuten:

(18) ¥(F;1,...,F;n,f;T(x;1),...,f;T(x;m)) = g;T(¥(H';1,...,H';n,t';1,...,t';m))

Fra (17) følger:

(19) T :– t';j=c;j og at t';jêConst(L) for j=1,...,m

Siden <H';1,...,H';n,t';1,...,t';m> ê Dom(¥) og ¥ er normal (Se §1 i dette kapitlet) har man også at

(20) <H';1,...,H';n,y;1,...,y;m> ê Dom(¥) der y;1,...,y:m er distinkte variabler som hverken forekommer i noen av H';1,...,H';n eller ¥(H';1,...,H';n,t';1,...,t';m) eller er blandt t';1,...,t';m.

Siden T = ß(Δ, J;0[Ç],L) har vi per definisjon at E(a,L) Inkl T siden aêÇ. La nå Q være formelen:

(21) T;<m,q(1)>(y;1,...,y;m,H';1) &.... &T;<m,q(n)>(y;1,...,y;m,H';n). –>
T;<m,q(n+1)>(y;1,...,y;m,¥(H';1,...,H';n,y;1,...,y;m))

Der den k'te konjunkten i antesedenten er utelatt om F*(k)=0. I lys av (20) og definisjonen av "E(a,L)" har man at QêE(a,L) og derfor:

(22) T :– Q. Da har man

(23) T : – (Ay;1)...(Ay;m)Q og derfor:

(24) T :– Q;(y;1,...,y;m)[t';1,...,t';m] siden man har:

T :– (Ay;1)...(Ay;m)Q –> Q;(y;1,...,y;m)[t';1,...,t';m]. Fra (24) og det at Q er formelen (21) følger, siden ¥ er substitusjonsinvariant i kraft av at den er normal og ingen av variablene y;1,...,y;m forekommer i noen av H';1,...,H';n at:

(25) T;<m,q(1)>(t';1,...,t';m,H';1) &.... &T;<m,q(n)>(t';1,...,t';m,H';n). –>
T;<m,q(n+1)>(t';1,...,t';m,¥(H';1,...,H';n,t';1,...,t';m))

der den k'te konjunkten i antesedenten er utelatt om F*(k)=0.

Fra (10) og (19) har vi kraft av A9:

(26) T :– T;<m,q(k)>(t';1,...,t',m,G;k) for de k der F*(k)=1.

Fra (16) og (12) har man :

(27) g;T(H';k) = g;T(G;k) om F*(k)=1 (1≤k≤n)

I lys av Lemma 2.2 i Kapittel III må det da finnes en formel P:k og konstanter d;1,...,d;(n;k), d';1,...,d';(n;k) i L der vi har

(28) (P;k);(z;1,...,z;(n;k))[d';1,...,d';(n;k)] = H';k

(29) (P;k);(z;1,...,z;(n;k))[d;1,...,d;(n;k)] = G;k og der man dessuten har:

(30) g;T(d;p) = g;T(d';p) for ≤p ≤ n;k.

Fra (30) følger ved hjelp av definisjonen av g;T og $\partial$ at:

(31) T :– d;p=d';p om 1≤ p ≤n;k. Fra (26), (28), (29), (31) og teoremer om identitet følger:

(32) T :– T;<m,q(k)>(t';1,...,t',m,H';k) for de k der F*(k)=1.

(32) og (25) impliserer:

T :– T;<m,q(n+1)>(t';1,...,t';m,¥(H';1,...,H';n,t';1,...,t';m)).

Dette impliserer i kraft av definisjonen av $f$;T(<m,q(n+1)>), (18) og (19) at:

¥(F;1,...,F;n,f;T(x;1),..,f;T(x;m)) ê$f$;T(<m,q(n+1)>)(x;1,...,x;n) som er det vi ønsker.

*Tilfelle (ii):* r=0. Da har ¥ karakteristikk <n,p>. For å vise at (3) holder i dette tilfellet antar vi at :

(33) <F;1,...,F;n,k;1,...,k;p> ê(CB;<n,p>(£;T)Ω Dom(¥))

og dessuten at:

(34) F;kê$f$;T(<m,q(k)>)(x;1,...,x;m) for de k der F*(k) = 1

Vi ønsker å vise at

¥(F;1,...,F;n,k;1,..,k;p) ê$f$;T(<m,q(n+1)>)(x;1,...,x;n)

Se i denne forbindelse definisjonen av "Sat" i §5.

Fra (4) og definisjonen av |R;T|^m = D;T^m følger det at det finnes konstanter c;1,...,c;mêConst(L) slik at:

(35) x;i = $\partial$([c;i]) for i=1,...,m. Dette og (34) gir en:

(36) F;kê$f$;T(<m,q(k)>)($\partial$([c;1]),...,$\partial$([c;m])) for de k der F*(k) = 1.

Fra (36) og definisjonen av "$f$;T(<m,q(k)>)" (Se Kapittel IV, §1) følger at det finnes formler G;k der vi har:

(37) F;k = g;T(G;k) og dessuten:

(38) T :– T;<m,q(k)>(c;1,...,c;m,G;k) for de k der F*(k)=1.

Nå har man Fml(£;T) Inkl Fml(L) etter definisjonen av £;T. Videre har man i kraft av (33) og definisjonen av CB;<n,m>(£;T) at F;1,...,F;nêCFml(£:T). I følge Lemma 2.4 i Kapittel III har vi derfor:

(39) F;j = g;T(F;j) for de j der F*(j)=0 (1≤j ≤n)

Vi setter nå per definisjon:

(40.1) H;j = G;j om F*(j)= 1 (1≤j ≤n)

(40.2) H;j = F;j om F*(j)= 0 (1≤j ≤n)

Da har man i lys av (37) og (39) at det følgende holder:

(41) F;i = g;T(H;i) for i=1,...,n.

Videre har vi :

(42) g;T(k;s) = $\partial$([k;s]) = k;s for s=1,...,p siden k;sêConst(£;T) Inkl Const(L).

Siden a er et indekssystem må ¥ være en normal syntaktisk operasjon. Da må den være regulær. I lys av (33), (41) og (42) samt det faktum at £;T er et språk for L og g;T er en L-morfi fra L over i £;T må det derfor, siden ¥ er regulær, finnes

(43) <H';1,...,H';n,t';1,...,t';p> ê(B;<n,p>(L)Ω Dom(¥)) der man har:

(44) g;T(H';i) = g;T(H;i) for i=1,...,n og

(45) g;T(t';j) =g;(k;j) for j=1,...,p.

Fra (45) følger:

(46) T :– t';s=k;s og at t';jêConst(L) for j=1,...,p

Videre må man ha på grunn av regulariteten til ¥ at:

(47) ¥(F;1,...,F;n,k;1,...,k:p) = g;T(¥(H';1,...,H';n,t';1,...,t';p))

La nå z;1,....z;p, y;1,...,y;m være distinkte nye variabler som hverken forekommer i noen av H';1,...,H';n eller ¥(H';1,...,H';n,t';1,...,t';p) eller er blant t';1,...,t';p. I lys av (43) og det faktum at ¥ er normal må vi ha:

(47.1) <H';1,...,H';n,z;1,....,z;p> êDom(¥)

Siden T = ß(Δ, J;0[Ç],L) har vi per definisjon at E(a,L) Inkl T siden aêÇ. La nå Q være formelen:

(48) T;<m,q(1)>(y;1,...,y;m,H';1) &.... &T;<m,q(n)>(y;1,...,y;m,H';n). –>
T;<m,q(n+1)>(y;1,...,y;m,¥(H';1,...,H';n,z;1,...,z;p))

Der den k'te konjunkten i antesedenten er utelatt om F*(k)=0. I lys av (47.1) og definisjonen av "E(a,L)" og det at r=1 har man at QêE(a,L) og derfor: T :– Q. Da har man

(49) T : – (Ay;1)...(Ay;m)(Az;1)...(Az;p)Q og derfor:

(50) T :– Q;(y;1,...,y;m,z;1,...,z;p))[c;1,...,c;m,t';1,...,t';p] siden man har:

T :– (Ay;1)...(Ay;m)Q –> Q;(y;1,...,y;m)[t';1,...,t';m]. Fra (50) og det at Q er formelen (48) følger, siden ¥ er substitusjonsinvariant i kraft av at den er normal og det at variablene y;1,...,y;m,z;1,...,z;p er distinkte og ikke forekommer i noen av H';1,...,H';n at:

(51) T;<m,q(1)>(c;1,...,c;m,H';1) &.... &T;<m,q(n)>(c;1,...,c;m,H';n). –>
T;<m,q(n+1)>(c;1,...,c;m,¥(H';1,...,H';n,t';1,...,t';p))

der den k'te konjunkten i antesedenten er utelatt om F*(k)=0.

Fra (40) og (44) har man :

(52) g;T(H';k) = g;T(G;k) om F*(k)=1 (1≤k≤n)

I lys av Lemma 2.2 i Kapittel III må det da finnes en formel P:k og konstanter d;1,...,d;(n;k), d';1,...,d';(n;k) i L der vi har

(53) (P;k);(w;1,...,w;(n;k))[d';1,...,d';(n;k)] = H';k

(54) (P;k);(w;1,...,w;(n;k))[d;1,...,d;(n;k)] = G;k og der man dessuten har g;T(d;p) = g;T(d';p) for ≤p ≤ n;k.

Fra dette følger ved hjelp av definisjonen av g;T og ∂ at:

(55) T :– d;p=d';p om 1≤ p ≤n;k. Fra (38), (53), (54), (55) og teoremer om identitet følger:

(56) T :– T;<m,q(k)>(c;1,...,c;m,H';k) for de k der F*(k)=1.

Dette og (51) impliserer:

T :– T;<m,q(n+1)>(c;1,...,c;m,¥(H';1,...,H';n,t';1,...,t';p)).

Dette impliserer i kraft av definisjonen av *f*;T(<m,q(n+1)>) og (47) at:

¥(F;1,...,F;n,k;1,..,k;p) ê*f*;T(<m,q(n+1)>)(x;1,...,x;n) som er det vi ønsker.

*Tilfelle (iii):* r=2. Da har ¥ karakteristikk <n,0>. For å vise at (3) holder i dette tilfellet antar vi at :

(57) <F;1,...,F;n> ê(CB;<n,0>(£;T)Ω Dom(¥))

og dessuten at:

(58) F;kê*f*;T(<m,q(k)>)(x;1,...,x;m) for de k der F*(k) = 1

Vi ønsker å vise at

¬(¬¥(F;1,...,F;n) ê*f*;T(<m,q(n+1)>)(x;1,...,x;n))

Se i denne forbindelse definisjonen av "Sat" i §5.

Fra (4) og definisjonen av |R;T|^m = D;T^m følger det at det finnes konstanter c;1,...,c;mêConst(L) slik at:

(59) x;i = ∂([c;i]) for i=1,...,m. (58) og (59) gir en:

(60) F;kê*f*;T(<m,q(k)>)(∂([c;1]),...,∂([c;m])) for de k der F*(k) = 1

Fra (60) og definisjonen av "*f*;T(<m,q(k)>)" (Se Kapittel IV, §1) følger at det finnes formler G;k der vi har:

(61) F;k = g;T(G;k) og dessuten:

(62) T :– T;<m,q(k)>(c;1,...,c;m,G;k) for de k der F*(k)=1

Nå har man Fml(£;T) Inkl Fml(L) etter definisjonen av £;T. Videre har man i kraft av (57) og definisjonen av CB;<n,0>(£;T) at F;1,...,F;nêCFml(£:T). I følge Lemma 2.4 i Kapittel III har vi derfor:

(63) F;j = g;T(F;j) for de j der F*(j)=0 (1≤j ≤n)

Vi setter nå per definisjon:

(64.1) H;j = G;j om F*(j)= 1 (1≤j ≤n)

(64.2) H;j = F;j om F*(j)= 0 (1≤j ≤n)

Da har vi i lys av (61) og (63):

(65) F;j = g;T(H;j) for j=1,...,n

Siden a er et indekssystem må ¥ være en normal syntaktisk operasjon. Da må den være regulær. I lys av (57) og (65) samt det faktum at £;T er et språk for L og g;T er en L-morfi fra L over i £;T må det derfor, siden ¥ er regulær, finnes

(66) <H';1,...,H';n> ê(B;<n,0>(L)Ω Dom(¥)) der man har:

(67) g;T(H';i) = g;T(H;i) for i=1,...,n og dessuten slik at

(68) ¥(F;1,...,F;n) = g;T(¥(H';1,...,H';n))

Siden T = ß(Δ, J;0[Ç],L) har vi per definisjon at E(a,L) Inkl T siden aêÇ. La nå y;1,...,y;m være distinkte variabler som ikke forekommer i H';1,...,H';n, og la Q være formelen:

(69) T;<m,q(1)>(y;1,...,y;m,H';1) &.... &T;<m,q(n)>(y;1,...,y;m,H';n). –>
¬T;<m,q(n+1)>(y;1,...,y;m,¬¥(H';1,...,H';n))

der den k'te konjunkten i antesedenten er utelatt om F*(k)=0. Siden r =2 har man i lys av (66) og definisjonen av "E(a,L)" har man at QêE(a,L) og derfor:

(70) T :– Q. Da har man

(71) T : – (Ay;1)...(Ay;m)Q og derfor:

(72) T :– Q;(y;1,...,y;m)[c;1,...,c;m] siden man har:

T :– (Ay;1)...(Ay;m)Q –> Q;(y;1,...,y;m)[c;1,...,c;m]. Fra (72) og det at Q er formelen (69) følger, siden ¥ er substitusjonsinvariant i kraft av at den er normal og ingen av variablene y;1,...,y;m forekommer i noen av H';1,...,H';n at:

(73) T;<m,q(1)>(c;1,...,c;m,H';1) &.... &T;<m,q(n)>(c;1,...,c;m,H';n). –>
¬T;<m,q(n+1)>(c;1,...,c;m,¬¥(H';1,...,H';n))

der den k'te konjunkten i antesedenten er utelatt om F*(k)=0.

Fra (64) og (67) har man :

(74) g;T(H';k) = g;T(G;k) om F*(k)=1 (1≤k≤n)

I lys av Lemma 2.2 i Kapittel III må det da finnes en formel P:k og konstanter d;1,...,d;(n;k), d';1,...,d';(n;k) i L der vi har

(75) (P;k);(w;1,...,w;(n;k))[d';1,...,d';(n;k)] = H';k

(76) (P;k);(w;1,...,w;(n;k))[d;1,...,d;(n;k)] = G;k og der man dessuten har: g;T(d;p) = g;T(d';p) for ≤p ≤ n;k.

Fra det siste følger ved hjelp av definisjonen av g;T og ∂ at:

(77) T :– d;p=d';p om 1≤ p ≤n;k. Fra (62), (75), (76), (77) og teoremer om identitet følger:

(78) T :– T;<m,q(k)>(c;1,...,c,m,H';k) for de k der F*(k)=1.

(73) og (78) impliserer:

(79) T :– ¬T;<m,q(n+1)>(c;1,...,c;m,¬¥(H';1,...,H';n)).

Anta nå for reduktio ad absurdum at :

(¬¥(F;1,...,F;n)) ê*f*;T(<m,q(n+1)>)(∂([c;1]),...,∂([c;m]))

Da finnes det, i lys av definisjonen av *f*;T(<m,n>), en formel A der man har:

(80) T :– T;<m,q(n+1)>(c;1,...,c;m,A) og

(81) g;T(A) = ¬¥(F;1,...,F;n)

Fra (81) følger det at det må finnes en formel B i L der A=¬B og der vi har:

(82) g;T(B) = ¥(F;1,...,F;n)

I lys av (68) har man da:

(83) g;T(B) = g;T(¥(H';1,...,H';n))

Fra (83) følger ved hjelp av Lemma 2.2 i Kapittel III at det finnes en formel C og kanstanter d;1,...,d;p, d';1,..,d';p slik at:

(84) C;(x;1,...,x;q)[d;1,...,d;p] = B

(85) C;(x;1,...,x;q)[d';1,...,d';p] = ¥(H';1,...,H';n) og dessuten:

(86) T :– d;i=d';i for i=1,..,p.

Fra (80), (84), (85), (86) og identitetsteoremer følger i lys av at A=¬B at:

(87) T :– T;<m,q(n+1)>(c;1,...,c;m,¬¥(H';1,...,H';n))

Dette strider mot (79) siden teorien T forutsettes å være konsistent. Det følger at man må ha:

¬[(¬¥(F;1,...,F;n)) ê*f*;T(<m,q(n+1)>)(∂([c;1]),...,∂([c;m]))]

og derfor siden x;i =∂([c;i]) for i=1,..,m at:

¬[(¬¥(F;1,...,F;n)) ê*f*;T(<m,q(n+1)>)(x;1,...,x;m)]

Vi har nå vist at (3) holder i alle tilfelle. Det følger at (2) holder. Dette avslutter beviset for Teorem 6.1. **Q.E.D.**

## §7 Et generelt fullstendighetsteorem for systemer av typen I:0[Ç].

Det andre generelle fullstendighetsteoremet som vi har lovet leseren er dette:

**Teorem 7.1** La Ç Inkl In(I). Anta Ç er en tillatt systemkarakteristikk. Anta videre at L,L'êI. Da har man at følgende påstander holder:

(a) La T = ß(Δ,I;0[Ç], L) være en I;0[Ç]-teori i L. Anta RêSem;(I;0)(Ç,L) og at R:= Δ. Da har man at R:= T.

(b) Anta T' = ß(Δ',I;0[Ç], L') er en konsistent I;0[Ç]-teori i L'. Da finnes det en modell R'êSem;(I;0)(Ç,L') slik at R' := T'.[25]

**Bevis:** Vi får et bevis for punkt (a) ovenfor ved å erstatte alle forkomster av "J;0" med "I;0" i beviset for punkt (a) i Teorem 6.1 i §6. Dessuten må vi erstatte alle forekomster av uttrykket "Mod;(J;0)" med "Sem;(I;0)". Gjør man dette vil beviset for (a) lyde slik:

Vi har at Ax(I;0,L) Inkl Val;L(Sem;(I;0)(L)) Inkl Val;L(Sem;(I;0)(Ç,L)) i lys av gyldighetsteoremet, dvs. Teorem 2.5 i §2 i Kapittel III. Derfor har man om man forutsetter at RêSem;(I;0)(Ç,L) at Val;L(Sem;(I;0)(Ç,L)) Inkl Val;L({R}). Dette impliserer at:

(1) Ax(I;0,L) Inkl Val;L({R}).

Siden vi etter forutsetningene har R := Δ har vi i lys av (1) at:

---

[25] Betrakt Sem*;(I;0)(L) for LêI. Vi kan som ved systemet I;0 definere en mengde modeller Sem*;(I;0)(Ç,L) hvor Ç er en systemkarakteristikk over I. Vi kan så definere et system I;0*[Ç] for hver Ç Inkl In og vise at I;0*[Ç] er komplett med hensyn på Sem*;(I;0)(Ç,L) om Ç er tillatt med hensyn på I. (Merk at begrepet 'tillatt' nå har et litt annet innhold enn tidligere). Et interessant problem er om man kan finne en troverdig tolkning av I;0[Ç] inn i I;0*[Ç]. Merk også at det for kompliserte systemkarakteristikker Ç kan være vaskelig å få verifisert om Sem;(I;0)(Ç,L) er ikke-tom, mens dette ikke behøver å by på noen problemer ved Sem*;(I;0)(Ç,L).

(2) R:= (Ax(I;0,L)U Δ

Nå har man åpenbart at:

(3) R:= F & R:= (F–>G) –> (R:= G & R:= (Ax)F)

Siden Ç er tillatt har vi om aêÇ at E(a,L) Inkl Val;L(Mod;(J0)({a},L). Nå har man Sem;(I;0)(Ç,L) Inkl Sem;(I;0)({a},L) og derfor, siden RêSem;(I;0)(Ç,L) at

E(a,L) Inkl Val;L(Sem;(I;0)({a},L)) Inkl Val;L(Sem;(I;0)(Ç,L) Inkl Val;L({R})

Men siden a var et vilkårlig element i Ç følger herav:

Ax(Ç,L) = UN/xêÇ/(E(x,L)) Inkl Val;L({R}).

Herav følger så (4) R:= Ax(Ç,L). Fra (2), (3) og (4) følger i lys av definisjonen av T=ß(Δ,I;0,L) at R:= T. Dette viser at punkt (a) i teoremet holder.

Beviset for punkt (b) i teoremet er, hvis det skal gjennomføres helt detaljert, temmelig langt. Vi skal innskrenke oss til å gi en skisse av beviset:

Anta T' = ß(Δ',I;0[Ç], L') er en konsistent I;0[Ç]-teori i L' i det vi forutsetter at Ç er en tillatt systemkarakteristikk. I følge Lemma 4.1 og 4.2 i §4 kan T' utvides til en komplett Henkin-teori T=ß(Δ, J;0,L) der L er en utvidelse av L' med konstanter og Δ' Inkl Δ. Vi konstruerer nå en modell R* = <m*, g*,∏*> hvor

m* = <*, D*, f*,£*,<*f*(<m,n>)>/<m,n>êNXN,G*>

som er med i Mod;(I;0)(L) på nøyaktig samme måte som i fullstendighetsbeviset for I;0 i Kapittel IV. (Se beviset for Teorem 2.1 i Kapittel IV). De forskjellige komponentene i R* og m* defineres så nøyaktig som i beviset for Teorem 2.1 i Kapittel IV, unntatt at vi nå definerer dem relativt til teorien T=ß(Δ,I;0[Ç],L). På samme måte som i beviset for Teorem 2.1 kan man så bevise:

(1) R* := T.

Faktisk vil beviset være ordrett som i §2 i Kapittel IV unntatt ved at vi erstatter enhver forekomst av "ß(Δ,I;0,L)" med ß(Δ,I;0[Ç],L). Man kan derfor oppfatte (1) som etablert.

Vi må imidlertid vise:

(2) R*êSem;(I;0)(Ç,L)

Vi vil da ha at R*|L' êSem;(I;0)(Ç,L') siden L bare er en utvidelse av L' med konstanter. Siden Lemma 3.1 og Lemma 3.2 i Kapittel III, §3 holder om "S" erstattes med "I;0[Ç]" vil det så følge at R*|L' := T'. At Lemma 3.1 og 3.2 i Kapittel III holder med disse forandringene er lett å verifisere og beviset overlates til leseren.

Vi vil derfor ha bevist punkt (b) om vi kan gi et bevis for (2). Det vil være tilstrekkelig å bevise at T(Ç,R*) dvs. at Tilf(a, R*) for alle aêÇ. La derfor a være et vilkårlig indekssystem i Ç. Da er aêIn;<n,m>(I) for noen m≥0, n≥1. Det følger at:

a= <[<m,q;1>,....,<m,q;(n+1)>], F*,¥,r>

for noen q;1,...,q;(n+1), F*,¥,r der disse komponentene er beskrevet slik som tidligere. Vi må vise at:

(3) Sat(<x;1,...,x;m>,a,R*) om <x;1,...,x;m>ê|R*|^m.

Anta derfor for vilkårlig <x;1,...,x;m> at:

(4) <x;1,...,x;m>ê|R*|^m = |R;T|^m (Konsulter i denne forbindelse definisjon av R*. Vi har i følge denne at |R*| = |R;T|

For å bevise (3) skiller vi mellom tilfelle r=0,1,2.

*Tilfelle (i):* r=0. Vi antar at:

(a) <F;1,...,F;n,f*(x;1),...,f*(x;n)>êCB;<n,m>(£(g*))ΩDom(¥)

og dessuten at:

(b) F;kê*f*;<m,q(k)>(x;1,...,x;m) for de k der F*(k)=1

Etter definisjonen av £(g*) har man at £(g*) er L;T. Se i denne forbindelse §5 i dette kapitlet og definisjonen av R*. Det følger at F;1,...,F;kêCFm(L;T) etter antagelse (a). Dette, (b) og

definisjonene av $f^*;<m,q(k)>$ og f* gir oss:

(5) <F;1,...,F;n,f;T(x;1),...,f;T(x;n)>êCB;<n,m>(£;T)ΩDom(¥) og

(6) F;kê$f$;T(<m,q(k)>)(x;1,...,x;m) for de k der F*(k)=1

Beviset er å nå videre ordrett som beviset for Tilfelle (i) i beviset for Teorem 6.1, punkt (b), ovenfor. På samme måte som der når vi frem til – i det vi erstatter enhver forekomst av "ß(Δ,J;0[Ç],L)" med "ß(Δ,I;0[Ç],L)" at:

¥(F;1,...,F;n,f;T(x;1),...,f;T(x;n)) ê$f$;T(<m,q(n+1)>)(x;1,...,x;m)
Inkl $f^*;<m,q(n+1)>(x;1,...,x;m)$

som er det man ønsker.

*Tilfelle (ii):* Anta r=1. Da har ¥ karakteristikken <n,p> for noe p. For å vise (3) antar vi at:

<F;1,...,F;n,k;1,...,k;p>êCB;<n,m>(£(g*))ΩDom(¥)

og dessuten at:

F;kê$f^*;<m,q(k)>$(x;1,...,x;m) for de k der F*(k)=1

På samme måte som forklart under tilfelle (i) kan man så utlede:

(33) <F;1,...,F;n,k;1,...,k;p> ê(CB;<n,p>(£;T)Ω Dom(¥))

og dessuten at:

(34) F;kê$f$;T(<m,q(k)>)(x;1,...,x;m) for de k der F*(k) = 1

Resten av beviset i dette tilfellet vil være ordrett som beviset for Teorem 6.1, punkt (b), Tilfelle (ii). Vi kan bruke den samme nummereringen av formlene, men vi må erstatte enhver forekomst av "ß(Δ,J;0[Ç],L)" med "ß(Δ,I;0[Ç],L)". Vi når frem til:

¥(F;1,...,F;n,k;1,...,k;p) ê$f$;T(<m,q(n+1)>)(x;1,...,x;m)
Inkl $f^*;<m,q(n+1)>(x;1,...,x;m)$

i lys av definisjonen av "$f^*;<m,n>$". Dette er hva vi ønsker.

*Tilfelle (iii):* Anta r=2. Da har ¥ karakteristikk <n,0>. For å vise (3) antar vi at:

<F;1,...,F;n>êCB;<n,0>(£(g*))ΩDom(¥)

og dessuten at:

F;kê$f^*;<m,q(k)>$(x;1,...,x;m) for de k der F*(k)=1

På samme måte som forklart under tilfelle (i) kan man så utlede, i lys av definisjonene av "L(g*)" og "$f^*;<m,n>$" :

(57) <F;1,...,F;n> ê(CB;<n,p>(£;T)Ω Dom(¥))

og dessuten at:

(58) F;kê$f$;T(<m,q(k)>)(x;1,...,x;m) for de k der F*(k) = 1

Resten av beviset i dette tilfellet vil være ordrett som beviset for Teorem 6.1, punkt (b), Tilfelle (iii). Vi kan bruke den samme nummereringen av formlene, men vi må erstatte enhver forekomst av "ß(Δ,J;0[Ç],L)" med "ß(Δ,I;0[Ç],L)". Vi når frem til:

¬[(¬¥(F;1,...,F;n))ê$f$;T(<m,q(n+1)>)(∂([c;1]),....,∂([c;m]))]

Nå har man i lys av (57) at (¬¥(F;1,...,F;n))êCFml(£;T). Men Z;<m,q(n+1)>(c;1,..,c;m) Ω CFml(£;T) = ø. Derfor må man i lys av definisjonen av $f^*;<m,n>$ ha at

¬[(¬¥(F;1,...,F;n))ê$f^*;<m,q(n+1)>(x;1,...,x;m)$] som er det vi ønsker.

Disse betraktningene viser at (2) ovenfor holder og dermed også beviset for Teorem 7.1.
**Q.E.D.**

## §8 Avsluttende bemerkninger.

Teorem 6.1 og Teorem 7.1 i dette kapitlet er svært generelle siden meget få restriksjoner er lagt på de syntaktiske operasjonene i en systemkarakteristikk Ç. Det må imidlertid medgis at vår teori om indekssystemer og systemkarakteristikker har en noe ad hoc-preget karakter. Det er mulig å generalisere denne teorien i forskjellige retninger og bevise ende mer omfattende

fullstendighetsteoremer enn Teorem 6.1 og Teorem 7.1. Det skulle derfor være mulig å konstruere en enda mer generell og avrundet teori enn den vi har presentert. Vi skal imidlertid ikke gå inn på dette her.

Det er ikke så vanskelig å gi eksempler på tillatte systemkarakteristikker Ç. Vi skal eksemplifisere og vise anvendelser av Teorem 6.1 i Kapittel VIII. Der vil forskjellige Ç Inkl In(J) bli spesifisert slik at J;0[Ç], for de forskjellige Ç, er kjente modallogikker. Vi skal i denne forbindelse blandt annet betrakte den minste klassiske logikken E, det minste regulære systemet C og det miste normale systemet K samt en rekke relaterte logikker.

# Kapittel VI

Logisk sannhet

## §1 Om muligheten av å gi en adekvat definisjon av logisk sannhet for intensjonale språk.

I dette kapitlet skal vi ta nøyere for oss spørsmålet om logisk sannhet for de språkene vi har betraktet i tidligere avsnitt. Siden problemet er meget omfattende er en viss begrensning nødvendig.[26] Vi skal innskrenke oss til å betrakte språk der de intesjonale operatorene er "propositional-attitude"-operatorer og vi skal videre anta at vi ikke har med noen utsagnsabstraksjonsoperator i språket. Vi vil derfor bare se på språk av J;0-typen. La L være et slikt språk. Det vi ønsker er å gi en definisjon av de logiske sannhetene i L, dvs. en teknisk og formelt sett presis definisjon av uttrykket "F er en logisk sannhet i L" som yter rettferdighet til våre intuisjoner om hva som faktisk er logiske sannheter i L. Intuitivt sett er de logiske sannhetene i et språk L de setningene F som det er umulig å tenke seg noe moteksempel til, som vil være sanne uansett hvordan eller i hva slags tilstand verden er. Nå er dette så vagt at det neppe kan brukes som definisjon, men jeg tror forklaringen kan være til hjelp når man på en mer uformell måte er villig til å diskutere hvorvidt en setning er en logisk sannhet eller ikke. Som et trinn på veien mot større presisjon kan vi si at en sening F er en logisk sannhet i L om den er sann uansett hvordan vi tilordner ekstensjon til de ikke-logiske symbolene i setningen. Nå er heller ikke dette særlig opplysende før man sier noe om hvordan sannhetsverdien til en setning avhenger av ekstensjonene som er tilordnet de deskriptive symbolene i den, dvs. predikatene, funksjonssymbolene og konstantene. Denne sammenhengen blir gjort klar i en J;0-modell R for et J;0-språk L. I en slik modell R kjenner man sannhetsverdien til en setning i modellen om man kjenner til hvordan de deskriptive symbolene i setningen har blitt tilordnet ekstensjon i R. Enhver slik modell kunne man tro at korresponderte til en intuitivt tenkelig verden eller saksforhold. Hvis det faktisk var slik ville

---

[26] En annen semantisk analyse av de såkalte "propositional attitudes" enn den som fremlegges her er gitt av Hitikka. Man kan i denne sammenheng konsultere Hintikka [1], særlig artiklene "Semantics for Propositional Attitudes" og "On the Logic of Perception". En dyptgående analyse av logikken til begrepene 'tro' og 'viten' foreligger i Hintikka [2]. Siden den teorien som fremlegges her er temmelig forskjellig fra Hintikkas teorier er det vanskelig å si noe om sammenhengen og forskjellene mellom dem som ikke bare blir overfladisk. Den mest iøynefallende forskjell er at Hintikkas teori er basert på idéen om mulige verdener, mens vår teori ikke er det. Videre bør det nevnes at vårt hovedproblem er begrenset substitusjon av logiske ekvivalenter i "propositional - attitude"-kontekster. Hintikka synes ikke i de nevnte arbeider å være spesielt opptatt av dette. Såvel siktepunktet som metoden i dette arbeidet er derfor temmelig forskjellig fra Hintikkas. En prinsipiell bemerkning kan legges til her. I mine øyne er det man kunne kalle "mulig-verdens intepretasjonen" av de såkalte "propositional attitudes" ikke umiddelbart innlysende. Det er heller ikke umiddelbart innlysende at dette er den mest fruktbare og plausible måten å analysere det som her er blitt kalt "propositional attitude"-operatorer på. Såvidt jeg kan se har altså ikke Hintikka demonstrert at hans metode er den eneste mulige eller den beste metoden. Det er f.eks. ikke opplagt at formelen "'x vet at F' er sann i en verden w hvis og bare hvis F er sann i enhver verden som er forenelig med alt det x vet i w" og lignende formler for de andre propositional attitudes har noen "tautologisk" karakter eller angir en spesielt evident sannhetsbetingelse for setninger av typen "x vet at F". For viten kan denne formuleringen passe uten at man protesterer alt for meget, men de tilsvarende formuleringene for begreper som f.eks. har med persepsjon å gjøre virker i svært mange tilfelle artifisielle og søkte. Man kan undres på om det er nødvendig eller ønskelig å presse de semantiske teoriene man har for logisk nødvendighet og beslektede begreper over på slike uttrykk som "ser at", "hører at", "vet at", "tror at", etc. Det kan diskuteres om de formelle analogiene som flere har ment seg å mellom la oss si de logiske og deontiske modalitene også kan uttstrekkes til også de konstruksjonene som nettopp ble nevnt. Det som er sagt kommer bare til anvendelse om man er interessert i å analysere konstruksjoner av typen "x vet at F", "x tror at F", "x ser at F" etc. når disse brukes i sin vanlige betydning. Hvis man bestemmer seg for å bruke dem i en annen betydning eller foretar idealiserende antagelser om "logisk allvitenhet" stiller saken seg anderledes. Det følger fra dette at jeg ikke er i mot Hintikkas begrep "epistemisk gyldighet" siden dette kan formuleres ved hjelp av epistemiske ideele verdener. Derimot er det ikke meningsløst å inta en mer reservert holdning til spørsmålet om eksistensen av slike verdener. Jeg håper at innholdet i dette kapitlet kan bidra til å styrke inntrykket av at Hintikkas måte å nærme seg de forskjellige propositional attitudes på ikke er den eneste mulige.

det være rimelig å identifisere de logiske sannhetene i L med de setninger som var sanne i enhver slik J;0-modell for L. Dermed ville vi ha gitt en helt presis eksplikasjon av "logisk sannhet i L". Det problemet man derfor står ovenfor er følgelig å avgrense den klassen av J;0-modeller for L som faktisk representerer klassen av hva vi intuitivt vil anse for å være tenkelige verdener eller saksforhold.

Det er nærliggende å tro at dette spørsmålet ikke lar seg besvare på noen definitiv måte siden uttrykket "tenkelig verden", og lignende uttrykk, er meget vage, og våre intuisjoner om hva som er et logisk mulig saksforhold virker ytterst diffuse og ubestemte. På den annen side synes det urimelig å hevde at vi ikke har noen intuisjoner om dette i det hele tatt. Det beste synes derfor å være at vi utnytter de intuisjonene vi faktisk har så godt vi kan og dessuten forsøker å gjøre dem klarere.

Hvordan skal vi så gå frem? Vi vet fra forrige kapittel at det er en nøye sammenheng mellom bestemte klasser av J;0-modeller og bestemte formelmengder. Vi systematiserte denne sammenhengen ved å innføre indekssystemer og systemkarakteristikker Ç. Til en systemkarakteristikk Ç assosierte vi på den ene side en klasse med modeller Mod;(J;0)(Ç,L), på den annen side en klasse med formler i L, Ax(Ç,L). Vi fant at dersom Ç var tillatt så var enhver formel FêAx(Ç,L) gyldig i enhver RêMod;(J;0)(Ç,L). Vi beviste så et generelt kompletthetsteorem for en logikk J;0[Ç] når Ç var tillatt.

Vår metode vil nå være denne: Vi tar for oss et intensjonalt språk L. I klassen av formler i L forsøker vi så å avgrense en klasse med formler S som det er opplagt at de logiske sannhetene må ligge innenfor. Vi forsøker så å skille ut de setningene fra S som det intuitivt sett ikke kan være tale om at er logisk sanne. Dette skjer ved en argumentasjon som ikke er av noen strengt formell natur. Vi ender med en mengde S' Inkl S. Vi ser så om vi kan finne en systemkarakteristikk Ç slik at: (1) S' = Val;L(Mod;(J;0)(Ç,L)). Eksisterer en slik kunne man foreslå å bruke høyre side i (1) som definiens i en definisjon av logisk sannhet for L.

## §2 Logisk sannhet i J:0-språk som bare inneholder operatoren "– tror at –". Diskusjon.

Vi forsøker nå å følge denne strategien for et J;0-språk L der den eneste intensjonale operatoren er "B;x(F)" som er en forkortelse for "x tror at F er tilfelle". Det er da nærliggende å ta for seg et modallogisk system, et vanlig standardsystem, og så "se etter" hvilke av aksiomene og slutningsreglene i dette systemet som er gyldige når modaloperatoren i systemet, la oss betegne denne med "Nec" gis tolkningen "B;x".

Vi skal her ta vårt utgangspunkt i det nokså sterke modalsystemet S5. Man får en versjo av S5 om man til systemet J;0 legger til de følgende aksiomskjemaer:

(1) Nec(F) & Nec(F–>G) –> Nec(G)
(2) Nec(F) –> F
(3) Nec(F) –> Nec(Nec(F))
(4) ¬Nec(¬F) –> Nec(¬Nec(¬F))

samt legger til den følgende slutningsregel:

(5) :– F –> :– Nec(F)

La oss se på hvilke av aksiomene og slutningsreglene som blir gyldige om "Nec" reintepreteres som "B;x". (1) må nå leses:

(6) B;x(F) & B;x(F–> G) –> B;x(G)

Nå kan denne formelen med en viss grad av plausibilitet bli betraktet som en logisk lov. Men tenker man etter kan det at det er vanskelig å finne moteksempler til (6) skyldes at (6) er oppfylt i sin allminelighet av normale tenkende individer x. Man kan, uten at det virker søkt, spørre om det er logisk nødvendig at enhver instans av (6) er sann, dvs. om det er logisk nødvendig at enhver person som tror at F og som dessuten tror at F–>G også tror at G. Selvom jeg ikke tror at (6) er noe logisk gyldig skjema kan jeg likevel tenke meg argumenter med en viss vekt til fordel for at dette skjema er gyldig. Man kunne argumentere på den følgende måte:

En person kan ikke rimligvis sies å tro at F–>G dersom vedkommende ikke til en viss grad kjenner betydningen til uttrykket "–>". Man kunne så hevde at et minimumkrav for å kjenne betydningen til "–>" er at vedkommende ser at G er en logisk konsekvens av F–>G og F. Man kunne nå tro at om B;x(F) og B;x(F–>G) så må det være slik at x er klar over det at F og F–>G impliserer G. Men dette sammen med det at B;x(F) og B;x(F–>G) burde implisere at B;x(G). Selv om et resonnement av denne typen kan virke overbevisende er jeg likevel ikke helt sikker. La oss se på et annet argument som kunne tenkes å legges frem mot at (6) er logisk gyldig:

La oss tenke oss den følgende situasjon hvor F og F–> G er kompliserte matematiske formler og x er en matematiker. x har gitt et innviklet bevis for at F er tilfelle og også et langt bevis for at F–> G er tilfelle. Disse bevisene virker ovebevisende på x slik at vi kan gå ut fra at B;x(F) og B;x(F–>G). For å kontrollere at setningene er riktige forsøker nå x å gi et bevis for G uavhengig av sine tidligere bevis for F og F–>G. Vi kan tenke oss at vedkommende forsøker å gi et indirekte bevis, dvs. forsøker å vise at ¬(G) –> H der H er en setning som x oppfatter som absurd. Kunne man ikke nå tenke seg den følgende situasjon? Etter strevsomme undersøkelser for å finne en sannhet av typen ¬(G) –> H, der H er absurd, finner x til sin forbauselse ingen. Tvertimot befinner x seg nå, på grunn av et feilresonnement, i den stilling at vedkommende finner seg tvunget til å akseptere en setning av typen G –>H der H er noe som fortoner seg helt uriktig. I denne situasjonen vil vedkommende akseptere tre bevis, nemlig et for at F er riktig, et for at F–>G er riktig og et for at G er feilaktig. Kunne man ikke nå tenke seg at selv om x finner at situasjonen er unormal og eiendommelig likevel tolerer den, og snarere enn å gi opp noen forutsetninger i de angivelige bevisene, mener seg å funnet et moteksempel til loven F&(F–>G). –> G ? Hvis så er tilfelle kunne man tenke seg å anse påstanden B;x(F) & B;x(F–>G) &¬B;x(G) for sann. I så fall ville man ha et moteksempel til (6).

Selv om jeg ikke føler meg fullstendig overbevist av dette eksemplet tror jeg det likevel kan bidra til å skape tvil om (6) er logisk gyldig i den forstand at enhver setning av denne formen er sann under alle tenkelige omstendigheter. Tross alt er det bare et spørsmål om det er mulig å tenke seg en matematiker x av typen ovenfor og ikke om det faktisk kan forekomme noen slike situasjoner.

La oss se på formel (2). Tolkes "Nec" som "B;x" får man som resultat:

(7) B;x(F) –> F

Dette er åpenbart ingen logisk sannhet siden det av og til er slik at man tror at noe er tilfelle uten at dette faktisk er tilfelle. Var (7) et logisk gyldig skjema ville feilaktig tro være en logisk umulighet.

Skjemaet (3) må leses som:

(8) B;x(F) –> B;x(B;x(F))

om "Nec" tolkes som "B;x". Setningen sier nå at dersom et individ tror at F er tilfelle er det også slik at dette individet tror at det selv tror at F.

Jeg er i tvil om (8) er et logisk gyldig skjema. Man kan betrakte det følgende motargument som her bare fremlegges som en mulighet: La oss tenke oss at F representerer en eller annen setning og at x er et individ som er alvorlig og ærlig overbevist om at F er tilfelle. På den annen side har x kanskje litt eiendommelige oppfatninger av hva som ligger i det at noen vet noe. Vedkommende tror for eksempel fullt og fast at enhver person som vet at noe er tilfelle ikke tror det han/hun vet. Vi har i så fall at følgende holder, om vedkommende, x, tror at dette prisippet også gjelder for x selv :

(9) B;x(F)
(10) B;x(K;x(F) –> ¬B;x(F))

Vi bruker her "K;x(F)" som forkortelse for "x vet at F". På den annen side mener x seg å gitt et bevis for at F er tilfelle og at enhver person som har gitt et bevis for at noe er tilfelle også vet at dette er tilfelle. Vi kan derfor anta at:

(11) B;x(K;x(F))

Hvis vi nå antar at alle instanser av (6) holder for individet x, noe jeg ikke kan se skulle kunne regnes som logisk umulig i dette tilfellet, følger i lys av (10) og (11) at:

(12) B;x(¬B;x(F)).

Antar man videre at alle instanser av skjemaet B;x(¬F) –> ¬B;x(F) holder for x, noe jeg heller ikke kan se at er logisk umulig, kan vi slutte at

(13) ¬B;x(B;x(F))

ved hjelp av (12). Siden det kan være vanskelig å se noe i denne situasjonen som er strengt tatt logisk umulig, og siden B;x(F) &¬B;x(B;x(F)) er sann om man tenker seg den realisert, er det nærliggende å medgi at (8) ikke er logisk gyldig.

Skjemaet (4) er åpenbart ikke logisk gyldig om "Nec" tolkes som "B;x(F)". Vi skal derfor ikke drøfte dette skjemaet nærmere.

La oss se på slutningsreglen (5). Ved hjelp av denne og (1) kan man lett utlede den følgende slutningsregel:

(14) :– (F–>G) –> :– Nec(F) –> Nec(G)

eller litt mer generelt:

(15) :– (F;1&...&F;n –> G) –> :– (Nec(F;1)&...&Nec(F;n) –> Nec(G)

Nå virker det igjen klart at (5) ikke uten videre kan oppfattes som en plausibel slutningsregel om "Nec" tolkes som "B;x". Anta f.eks. at F er en meget komplisert logisk sannhet. Det kan da fortone seg svært rimelig å påstå at (Ax)B;x(F) ikke er noe som er sant med logisk nødvendighet. Er f.eks. F kondisjonalen G;1 –>G;2, der G;1 er en konjunksjon av bestemte instanser av aksiomene Zermelo-Fraenkel mengdelære og G;2 en formulering av velordningsteoremet, så vil F være en logisk sannhet. Men det er åpenbart at det kan finnes

en rekke individer x som ikke har noen formening om hvorvidt G;1 –> G;2 er riktig eller ikke. I så fall er det slik at ¬B;x(G;1–>G;2) og ¬B;x(¬(G;1–>G;2)). Det kan her kanskje til og med tenkes en matematiker, x, som tror at en bestemt sats H er gal, mens vedkommende tror at en viss samling med aksiomer F;1,...,F;n er sanne selv om H faktisk er en logisk konsekvens av F;1,...,F;n. I så fall har man den enda mer drastiske situasjon der B;x(¬(F;1&...&F;n –> H)), men hvor F;1&...&F;n –> H faktisk er en logisk sannhet.

Disse overveielsene kan i det minste skape en viss tvil om at B;x(F) er en logisk sannhet om F er en komplisert logisk sannhet. Men dette utelukker ikke at B;x(F) kan være logisk sann om F er en meget enkel og opplagt logisk sannhet.

La oss se litt nøyere på dette. Er eksempelvis:

(17) B;x(¬(F&¬F))

noen logisk sannhet? Det kan være fristende å svare benektende. Hvorfor skulle man ikke kunne forstille seg en person som mener at for alle vanlige objekter a, og alle vanlige predikater P, er det sant at ¬(P(a) &¬P(a)), men som ikke desto mindre mener at det finnes visse uvanlige objekter av et bestemt slag (kanskje sansedata) som ikke oppfyller denne loven? Er b et slikt "kontradiktorisk" objekt føler personen at det er helt riktig å si at B(b) &¬B(b) for visse bestemte predikater B. Strengt tatt vedkommer det ikke saken om det faktisk finnes slike objekter eller om det faktisk finnes en slik person. Spørsmålet er om det er logisk mulig om en slik person finnes. Dette kan man være tilbøyelig til å svare bekreftende på. Den konkusjonen er i så fall nærliggende at at selv når F er en meget enkel logisk sannhet er ikke B;x(F) logisk gyldig.

Vi har allerede betraktet et mulig forsøk på å gi et moteksempel til slutningsreglen (15) når "Nec" reintepreteres som "B;x" i forbindelse med vår diskusjon av skjemaet (6). Dette er således fordi F&(F–>G).–>G er en logisk sannhet. Dette moteksemplet kan vel imidlertid neppe anses som ukontroversielt. Men det er mulig at man kan finne mer tvingende moteksempler til (15) når "Nec" tolkes som "B;x". Selvom F;1,...,F;n kan tenkes å være setninger som uttrykker forholdsvis enkle påstander, og man har at B;x(F;1)&....& B;x(F;n) for et eller annet individ x, kan man lett tenke seg en setning G som er en logisk konsekvens av F;1,...,F;n, men som er såpass komplisert at x er ute av stand til å se om den er sann eller usann eller hvorvidt den faktisk er en logisk konsekvens av F;1,...,F;n. Det kan derfor tenkes at x ikke har noen bestemt mening om dens sannhetsverdi. I så tilfelle har man ¬B;x(G). Videre synes det rimeligå tro at det skulle kunne finnes situasjoner der x tror at F er tilfelle, men ikke tror at G er tilfelle til tross for at G er en logisk konsekvens av F. Jeg tror det neppe skulle være så vanskelig å finne konkrete eksempler på dette som ikke virker konstruerte.

Imidlertid forhindrer ikke dette at B;x(F;1) &...&B;x(F;n). –> B;x(G) kan være en logisk sannhet når F;1&....&F;n –> G er en svært enkel og innlysende logisk sannhet. Man kunne eksempelvis betrakte formlene:

(18) B;x(¬¬F) –> B;x(F)
(19) B;x(F&G) –> B;x(F)

Igjen kan man ha på følelsen at formler av denne typen i beste fall er universelle empiriske sannheter enn egentlig logisk nødvendige sannheter. Noe av det som ble nevnt i forbindelse med (6) og (17) kan også trekkes inn her. Det kan hevdes at det ikke behøver å være logisk umulig at det finnes en persom som har et noe avvikende syn på logisk sannhet og som tror at det finnes visse eiendommelige objekter som ikke adlyder logikkens vanlige lover. Vedkommende kan, la oss tenke oss det, tro om et slikt objekt a at ¬¬F(a) og ¬F(a) holder og

derfor faktisk tro at ¬¬F(a) , men likevel ikke tro at F(a). Lignende tilfeller kan betraktes i forbindelse med (19). Et moment som kan nevnes her er at man ikke behøver å tenke seg denne personen som fullstendig vanvittig eller sinnsforvirret. Det er kanskje bare i spesielle tilfelle at vedkommende kan tenkes å mene at vi må oppgi noen av de vanlige logiske lovene for å gi en beskrivelse av bestemte gjenstander. Personen behøver ikke å mene at dette må gjøres i alle tilfeller. Det kan derfor tenkes at personens oppfatninger av de vanlige logiske konnektivene ikke behøver å være radikalt forskjellige fra de vanlige oppfatningene, eller behøver å tenkes som så forskjellige at normal kommunikasjon blir umulig.

La oss nå oppsummere resultatet av disse overveielsene. Vi har funnet at det er mulig å fremsette argumenter for at ingen av aksiomene og slutnings-reglene i S5 er logisk gyldige om "Nec" reintepreteres som "B;x". I lys av diskusjonen av slutningsreglene (5) og (16) synes de fremlagte argumenter å støtte en meget sterkere konklusjon, nemlig at ingen formler som ikke er noe J;0-teorem i L er logisk sanne. Selvom denne konklusjon langt fra kan sies å være bevist på noen streng måte, kan man ha en viss tiltro til at ytterligere undersøkelser kan komme til å styrke ens tiltro til den. De fremlagte overveielser kan derfor oppfattes som evidens til fordel for denne påstand.

Ser man nå på andre intensjonale operatorer av "propositional attitude"-typen finner man at situasjonen i det vesentlige synes å være likedan. Svake intensjonale operatorer av denne typen, som for eksempel "x her et inntrykk av F", "x merker at F", "x synes det er slik at F", "x er i tvil om det er slik at F", og en rekke andre, synes å oppføre seg nøyaktig på samme måte som "B;x(F)". Det er derfor ikke utelukket at man kan og bør betrakte den følgende tese:

(20) Er "A;x(F)" en svak intensjonal "propositional attitude"-operator og er L et J;0-språk der den eneste intensjonale operatoren er A, så er de logiske sannhetene i L nøyaktig de formlene i L som er sanne i alle J;0-modeller for L.

Merk i denne forbindelse at i følge kompletthetsteoremet for J;0 har man at Th(J;0,L) = Val;L(Mod;(J;0)(L)). De logiske sannhetene i L vil derfor, om (20) er riktig, falle sammen med Th(J;0,L).

## §3 Logisk sannhet i J:0-språk som bare inneholder operatoren "– vet at –". Diskusjon.

Så langt har vi ikke betraktet strenge intensjonale operatorer av "propositional attitude"-typen. Et klart eksempel på en slik operator er "x vet at F", som vi skal forkorte med "K;x(F)". En åpenbar logisk sannhet for denne operatoren er

(1) K;x(F) –> F

La nå L være et J;0-språk der "K;x" er den eneste intensjonale operatoren. Er det flere skjemaer i L som intuitivt sett er logisk gyldige utenom det vi her har nevnt? Man kan være tilbøylig til å svare benektende. Man kan spørre om ikke enkle formler av typen (6) i §2 er gyldige når man erstatter "B;x" med "K;x". Kan man for eksempel tenke seg et individ x som oppfyller betingelsen:
"K;x(F) & K;x(F–>G)", men som ikke oppfyller betingelsen "K;x(G)". I denne sammenheng kan det være vanskelig å finne et virkelig klart eksempel som viser at:

(2) K;x(F) & K;x(F–>G). –> K;x(G)

ikke er noen logisk sannhet. Men det kan være vanskelig å se den prinsipielle forskjellen mellom (2) og den følgende formel:

(3) K;x(F;1) & .... &K;x(F;n) –> K;x(G)

der F;1&...&F;n –>G er en komplisert logisk sannhet. For meget kompliserte formler av denne typen synes det ikke spesielt rimelig å hevde at (3) er logisk gyldig. Spørsmålet oppstår derfor om hvordan man skal dra grensen mellom de instanser av (3) som er logiske sannheter fordi F;1&...&F;n –>G er tilstrekkelig opplagt og de som ikke er det. Det kan hevdes at det er umulig å gjøre dette på måter som ikke er fullstendig ad hoc. Og siden det likevel kan være uenighet om gyldigheten til formler av typen (2) vil en fremgangsmåte der man kutter dem vekk i alle fall kunne hevdes å ha den fordel at man ikke får med seg noen formler som er ugyldige. I verste fall vil systemet bli ufullstendig.

Ser man på andre strenge intensjonale operatorer av "propositional attitude"-typen, som for eksempel "x ser at F" og x hører at F" kan den samme konklusjonen virke nærliggende. Om disse overveielsene har noe for seg er det fristende å betrakte den følgende tese:

(4) Er "A;x(F)" en streng intensjonal "propositional attitude"-operator og er L et J;0-språk der den eneste intensjonale operatoren er A, så er de logiske sannhetene i L nøyaktig de formlene i L som er sanne i alle J;0-modeller for L.[27]

## §4 Diskusjon av logisk sannhet for språk med flere intensjonale operatorer.

Ser man nå på J;0-språk som inneholder flere intensjonale operatorer av "propositional attitude"-typen er situajonen mer komplisert og mindre lett å oppsummere på noen enkel måte. Vi skal derfor innskrenke oss til mer spredte bemerkninger. Vi ser først på et J;0-språk der de eneste operatorene er "K;x" og "B;x". Hvilke nye logiske sannheter kan komme i betraktning om man tenker seg at begge disse operatorene er med i språket L? To nokså iøynefallende kandidater er:

(1) K;x(F) –> B;x(F)
(2) B;x(F) –> K;x(B;x(F))

Det er dem om har betvilt at (1) kan regnes som en logisk sannhet. Det er vanskelig å bli overbevist av de argumenter som har blitt fremsatt. Det virker derfor naturlig å ta i betraktning et system der (1) regnes som en logisk sannhet. Man ser lett at (1) er gyldig i alle de J;0-modeller der man krever at

(a) $f$;K(R)(x) Inkl $f$;B(R)(x) om xê|R[.

---

[27] En formel vi ikke har diskutert er (1) "K;x(F) –> K;x(K;x(F))" der "K;x" står for "x vet at". Denne formelen forsvares på en meget interessant måte av Hintikka i Hintikka [2]. En ytterligere klargjøring og vurdering av argumentene i Hintikka [2] foreligger i Hintikka [5]. En annen interessant diskusjon av den logiske status til (1) er gitt av Hilpinen i Hilpinen [1]. Jeg kan ikke se at noen av argumentene i de nevnte artikler, eller andre arbeider der problemet har blitt diskutert, definitivt viser at (1) er en gyldig formel. Kanskje den er logisk gyldig for noen tolkninger av "vet at" og ikke logisk gyldige for andre. For min egen del er jeg mest tilbøyelig til anse formler av typen (1) for å være logisk ugyldige.

(2) er derimot et skjema som det kan være grunnlag for å forkaste. Vi betraktet tidligere argumenter til fordel for at det kunne være logisk mulig at det finnes et individ x der B;x(F) og ¬B;x(B;x(F)). Aksepterer man nå at (1) holder for dette individet – noe man med en viss plausibilitet kan hevde at ikke er logisk umulig – finner man at B;x(F) & ¬K;x(B;x(F)) om man antar at trosfeltet til x er lukket under modus ponens. Men B;x(F) & ¬K;x(B;x(F)) er uforenelig med (2). Er derfor den nevnte situasjon logisk mulig er det vanskelig å oppfatte (2) som en logisk sannhet, en setning som skulle være sann under alle mulige omstendigheter.

En av grunnene til at man er tilbøyelig til å anse (2) for logisk gyldig synes å være hva man kunne kalle et "introspektivt" argument: Reflekterer man over det man tror kan man umiddelbart innse at man tror det og det. Man blir klar over det, og har følgelig en helt sikker kunnskap om det. Det er mulig at man kan hevde at dette argumentet har preg av et sirkelargument siden man ikke rettferdiggjør slutningen fra det at man tror at F til det at man umiddelbart innser ved introspeksjon at man tror at F. Denne slutningen virker ikke noe mer innlysede enn (2) og det kunne virke som om man snarere burde trekke inn (2) for å begrunne denne slutningen. I så fall kan ikke dette argumentet tillegges noen vekt. Man kunne kanskje også hevde at det er et empirisk faktum at man ved introspeksjon kan oppdage at man tror et eller annet når man faktisk tror dette. Man kan likevel spørre om hvorfor det ikke skulle være logisk mulig å forestille seg individer som var totalt uten evne til introspeksjon, men som ikke desto mindre visste og trodde at en lang rekke ting var tilfelle. Hvis dette er mulig kunne man hevde at argumentet basert på introspeksjon derfor i høyden viser at (2) er en generell empirisk sannhet, ikke at enhver setning av denne form er logisk nødvendig.

Er det andre formler i dette rikere språket som kan betraktes som gyldige skjemaer? Man kan betrakte følgende formler:

(3) B;x(K;x(F)) –> B;x(F)
(4) B;x(K;y(F)) –> B;x(F).

Begge skjemaene kan ved første øyekast virke gyldige. Trolig kan man likevel sette spørsmålstegn ved deres rent logiske status. Tidligere ble det betraktet argumenter til fordel for at selv en formel som B;x(F) –> B;x(G) ikke er logisk gyldig selvom G er en temmelig opplagt konsekvens av F. Har disse argumentene en viss vekt ville det være inkonsekvent om man aksepterte (3) og (4) som logiske sannheter. Situasjonen er jo den samme, siden F kan oppfattes som en temmelig opplagt konsekvens av K;x(F).

Det er imidlertid ingen ting i veien for – rent formallogisk sett – å betrakte et system der man legger til (1), (3) og (4) som nye aksiomskjemaer til J;0. Betrakter man så de J;0-modellene R som i tillegg til kravet nevnt ovenfor også oppfyller de følgende to krav:

(a) Er xê|R| og er FêCFml(£(R)) så er
Fê$f$;B(R) om K(f(R)(x),F)ê$f$;K(R)(x)
(b) Er xê|R| og er FêCFml(£(R)) og aêConst(£(R)) så er
Fê$f$;B(R) om K(a,F)ê$f$;K(R)(x)

kan man vise at alle teoremene i dette utvidete J;0-systemet for gyldige. Det er heller ikke vanskelig å vise at systemet er komplett med hensyn på denne klassen av modeller. Fra en rent formell sysnsvinkel er det derfor ikke noen spesielle vanskeligheter forbundet med å betakte (3) og (4) som logiske sannheter. Systemet som har blitt skissert er imidlertid meget svakt og det er derfor klart at ikke noe særlig av interesse kan utledes i det.

Er det andre formler i dette rikere språket som kunne tenkes å være gyldige? Det synes vanskelig å besvare spørsmålet på noen definitiv måte. Det kan ved ettertanke virke

som om det er vankelig å gi eksempler som er mer evidente enn for eksempel formlene (3) og (4). Er man skeptisk til gyldigheten av dem er det derfor naturlig å forvente at det vil være vanskelig å formulere andre skjemaer i L som, kritisk betraktet, fremstår som logisk gyldige. Legger man flere intensjonale "propositional attitude"-operatorer til L synes situasjonen på mange måter å være den samme.

La oss fremsette noen avsluttende bemerkninger. Vi skal ikke her undersøke detaljert hva som skjer om man legger til enda flere operatorer til språket enn dem som ble nevnt ovenfor. Heller ikke hevder vi å ha undersøkt alle de formlene i språket L med operatorene "K;x" og "B;x" som det er en viss sannsynlighet for at er logiske sannheter. Imidlertid virker det trolig at videre undersøkelser vil vise at selv ikke i rikere språk av den typen som er antydet foreligger det mange formler av den typen som ukontroversielt kan sies å være logiske sannheter. Det mest sannsynlige er at man kan peke noen "lover" som er omtrent like evidente som (1) – (4). Vi har imidlertid påpekt den noe tvilsomme status som disse formlene har.

La L være et språk som inneholder en vilkårlig mengde av intensjonale "propositional attitude"-operatorer. La S være mengden av alle de formler i L som intuitivt er logisk sanne i streng betydning. Er nå semantikken vi har innført adekvat i den betydning at det finnes en klasse X av J;0-modeller for L slik at for alle FêFml(L) så er FêS hvis og bare hvis F er gyldig i enhver modell RêX? Man kan driste seg til å gjette på dette. Det er klart at det så langt ikke har blitt gitt noe bevis for dette. Men overveielsene som har blitt fremlagt ovenfor kan oppfattes som evidens til fordel for denne konklusjon. Et annet moment som tilsynelatende støtter denne konklusjon er det generelle fullstendighets-teoremet vi har gitt for J;0[Ç], der Ç er en tillatt systemkarakteristikk. Dette viser at vår semantikk kan oppfattes som adekvat for en hel rekke, delvis eiendommelige og høyest uvanlige, systemer. Man har derfor å gjøre med en metode som er meget fleksibel og det behøver ikke derfor å være så usannsynlig at man skulle kunne finne en systemkarakteristikk Ç, enten i den betydningen som er blitt definert, eller i en mer omfattende betydning, som er slik at
S= Val;L(Mod;(J;0)(Ç, L).

## §5 Introduksjon av spesielle predikater. Problemene om logisk sannhet sett i lys av de nye predikatene.

Vi ser igjen på språket L som bare inneholder operatoren "B;x" og ingen andre intensjonale operatorer. Konklusjonen i §2 var at logikken for denne operatoren var meget fattig og fra en logisk synsvinkel noe uinteressant siden den simpelthen var J;0. Vi generaliserte denne konklusjonen til de andre svake "propositional attitude"-operatorene. Nå kunne man tro at om dette var alt som kunne sies om logikken til disse operatorene ville det rent logiske studium av dem være noe trivielt og poengløst. Det bør imidlertid understrekes at dette inntrykket er rent prima facie og at en nøyere gjennomtenkninga av saken vil føre en til et ganske annet resultat.

Det logisk sett interessante ved konstruksjonen "B;x" kommer ikke til syne om man bare betrakter denne operatoren helt isolert. Dette kommer imidlertid etter vår mening bedre frem om man betrakter operatoren sammen med en rekke forskjellige unære predikater π;0,...,π;n,..som vi gir en bestemt intepretasjon i alle J;0-modeller. For eksempel kan man introdusere et unært predikat π;0 som er sant om et individ x hvis og bare trosfeltet til x (det vil si mengden av alle de intensjonene som x tror er riktige) er en J;0-teori eller for eksempel er lukket under en eller annen veldefinert konsekvensrelasjon. Dette vil innebære at man gjør visse antagelser om rasjonalitet i tilknytning til individet x. Det er på denne måten man kan få frem en mer interessant "doxastisk" logikk. Det interessante problem er altså ikke hva man kan slutte fra setninger av typen "B;x(F)" isolert sett, men hva vi kan slutte fra denne, og andre setninger, gitt at x er en person der trosfeltet er organisert på en logisk sett rasjonell

måte.

La oss se på hvordan denne idéen kan gjøres mer presis ved hjelp av vår semantikk. La Ç være en systemkarakteristikk over J, ie. anta Ç Inkl In(J). Vi sier da at Ç er av grad m hvis og bare hvis (Aa)(aêÇ –> (En)(aêIn;<n,m>(J))). Bredden til en systemkarakteristikk Ç Inkl In(J) er kardinaltallet til
UN/aêÇ/(Rgn((a);1), dvs. antallet distinkte indekser på intensjonale operatorer som er "involvert" i Ç.

Vi tenker oss nå at alle våre J;0-språk inneholder en tellbart uendelig mengde med en-plasspredikater π;0,...,π;n,.... Disse regner vi nå med til det logiske vokabularet i disse språkene. De har altså samme status, rent formelt sett, som identitetstegnet "=". Forøvrig kan de språkene vi betrakter inneholde så mange andre deskriptive symboler som man ønsker. Anta at indeksen til tros-operatoren B er <1,1>. Vi betrakter en rekke systemkarakteristikker Ç;0,...,Ç;n,... som korresponderer til predikatene π;0,...,π;n,.... Vi forutsetter at de diverse Ç;i'ene er av grad 1 og at UN/aêÇ;i/(Rgn((a);1) ={<1,1>} for i=1,2,..... La nå L være et J;0-språk av denne typen. Man kan da gi π;j en konstant tolkning i alle J;0-modeller R for L i det man stipulerer:

(i) ∏(R)(π;j) Inkl UN/aêÇ;j/(Mg(x: xê|R| & Sat(x,a,R)))

Man ser da at π;j(n(x)) er sann i en J;0-modell R bare hvis "trosfeltet" til x i modellen , *f*;<1,1>(R)(x), har en bestemt egenskap bestemt av indekssystemene i Ç;i. Ser man nå på de setningene i L som er sanne i alle modeller R om π;j tolkes slik som ved (1), ser man at en rekke nye setninger som inneholder "B;x" blir gyldige. Nøyaktig hvilke avhenger naturligvis av hvilke konkrete Ç;j det er man betrakter.

Denne teknikken med å innføre spesielle predikater π;j som er sanne om et individ xê|R| bare dersom *f*;<1,1>(R)(x) oppfyller bestemte krav er helt generell. Den virker ved enhver av de "propositional attitude"-operatorene vi har nevnt å synes fullt ut å yde rettferdighet til hva der er av "logikk" ved dem. Metoden vil bli klarere ved å studere nøyere et konkret eksempel. Dette gir vi en fremstilling av i den neste paragrafen.

## §6 Et eksempel på en kalkyle.

Vi begrenser oss til å betrakte J;0-språk L som kun inneholder den intensjonale operatoren "B;x" og ingen andre. Videre forutsetter vi nå at alle språkene inneholder et unært predikat π;0. Vi regner dette med til det logiske vokabularet i ethvert av de språkene vi betrakter. Er R en J;0-modell for L defineres betingelsen "C;R(x)" slik:

C;R(x) holder hvis og bare hvis x er et element i |R| der man har:
(a) Er FêCFml(£(R)) og FêTh(J;0,£(R)) så er Fê*f*;B(R)(x)
(b) Er F, F–>GêCFml(£(R)) gjelder:
Fê*f*;B(R)(x) & (F–>G)ê*f*;B(R)(x) –> Gê*f*;B(R)(x)

Vi ser så på klassen av alle de J;0-modellene R for L der vi har:

(1) ∏;R(π;0) Inkl Mg(x: C;R(x))

Denne klassen av J;0-modeller for L betegner vi med "A(L)". Man ser umiddelbart fra disse definisjonene at *f*;B(R)(x) er en J;0-teori om R(π;0(i)) =1 der i er et navn i L(R) på individet x. En setning av typen π;0(i) i L(R) uttrykker derfor at trosfeltet til x er en J;0-teori. Vi setter S(L) = Val;L(A(L)). S(L) er altså mengden av alle de formler i L som er gyldige i enhver

modell i klassen A(L).

Formelmengden S(L) kan aksiomatiseres på den følgende måte:
Aksiomene er foruten alle J;0-aksiomene i L alle instanser i L av det følgende skjema:

(2) $\pi;0(x) \rightarrow (B;x(F) \& B;x(F \rightarrow G). \rightarrow B;x(G))$

Man ser lett at enhver instans av (2) er gyldig i enhver RêA(L) siden $f;B(R)(x)$ er lukket under modus ponens om xê|R| og xê∏(R)(π;0).

Dessuten er alle formler av typen:

(3) $\pi;0(x) \rightarrow B;x(F)$

der det forutsettes at FêTh(J;0,L), aksiomer i systemet. Man ser også her lett at alle formler av typen (3) er gyldige i enhver RêA(L) siden:

$f;B(R)(x)$ Inkl Mg(F: FêCFml(£(R)) & FêTh(J;0,£(R))) om xê∏:R(π;0).

Slutningsreglene er slutningsreglene i J;0, dvs. modus ponens og universell generalisering.

Vi kaller denne logikken for S*. S*-teoremene i L betegner vi med "S*(L)". Som man ser har vi at (4) S*(L) Inkl S(L) siden alle aksiomene i S* er gyldige i A(L) og slutningsreglene åpenbart er gyldighetsbevarende. At S(L) Inkl S*(L) innbærer at systemet S* er komplett. Dette følger fra det generelle kompletthetsteoremet vi skal formulere og bevise i neste kapittel. Vi nøyer oss bare med å påstå S*(L) = S(L) her.

Siden det ikke er avgjørbart om FêTh(J;0,L) eller ikke er det umulig å avgjøre om en formel av typen $\pi;0(x) \rightarrow B;x(F)$ er et aksiom eller ikke. S* er derfor ingen rekursiv aksiomatisering av S(L). Vi skal nå definere en slik rekursiv aksiomatisering av denne eksempelkalkylen. For dette formål gir vi først bevis for den følgende sats:

**Teorem 6.1** $(\pi;0(x) \rightarrow B;x(F))$êS*(L) <–> FêTh(J;0,L)

**Bevis:** Kondisjonalen mot venstre er triviell, siden $\pi;0(x) \rightarrow B;x(F)$ er et aksiom i S*(L) om FêTh(J;0,L). Anta ¬(FêTh(J;0,L)). Anta x;1,...,x;n er de fri variablene som forekommer i F. La L' være L utvidet med n nye konstanter e;1,...,e;n. Definer nå en modell R ved å sette:

(i) £(R) = L'
(ii) |R| = Const(L')
(iii) f(R) = Id|Const(L')
(iv) g(R)(u) = u om u er et ikke-logisk symbol i L'
(v) $f;B(R)(x)$ = CFml(£(R))Ω Th(J;0,£(R)) for alle xê|R|

Vi definerer ∏(R)(u) for ikke-logiske symboler u ad libitum, men setter ∏(R)(π:0) = Mg(x: C;R(x)).

La i;1,...,i;n være navn der vi har at R(i;k) = e;k for k=1,..,n. Man har da: g(F;(x;1,...,x;n)[i;1,...,i;n]) = F;(x;1,...,x;n)[e;1,...,e;n] Fra dette og ¬(FêTh(J;0,L)) har man i lys av konstantteoremet at:

¬( g(F;(x;1,...,x;n)[i;1,...,i;n]) êTh(J;0,L)) Men F'=F;(x;1,...,x;n)[i;1,...,i;n] er en R-instans av F. Man har derfor at R(B;(i;1)(F'))= 0 i lys av definisjonen av $f;B(R)(x)$. Videre må man ha at R(i;1) =e;1ê Mg(x: xê|R|&C;R(x)). Det følger derfor at R(π;0(i;1))=1. Men da R(π;0(i;1) –> B;(i;1)(F'))=0. Men da må man også ha: ¬(R := (π;0(x) –> B;x(F)). Dette impliserer at ¬((π;0(x) –> B;x(F))êS*(L) i lys av gyldighetsteoremet for S* som man lett kan vise at gjelder. **Q.E.D.**

Vi beskriver så den rekursive aksiomatiseringen av S* som vi kaller S**. Aksiomer i S** er foruten J;0-aksiomene i L alle instanser av følgende skjema:

(5) $\pi;0(x) \rightarrow (B;x(F) \& B;x(F \rightarrow G). \rightarrow B;x(G))$

og dessuten er enhver formel av typen:

(6) $\pi;0(x) \rightarrow B;x(F)$

der F er et J;0-aksiom i L.

Slutningsregler i systemet er foruten modus ponens og universell generalisering også den følgende regel:

(7) $:- \pi;(x) \rightarrow B;x(F). \quad \rightarrow \quad :- \pi;(x) \rightarrow B;x(Ay)F)$

Vi skal nå vise, i det vi lar S**(L) være klassen av S**-teoremer i L, at

**Teorem 6.2** $S^{**}(L) = S^{*}(L)$

**Bevis:** (a) Vi viser: S*(L) Inkl S**(L). Man behøver bare å vise :
$F \hat{e} Th(J;0,L) \rightarrow (\pi;(x) \rightarrow B;x(F)) \hat{e} S^{**}(L)$
Dette bevises ved induksjon på mengden av J;0-teoremer i L. Man har åpenbart at $G \hat{e} C = Mg(F: (\pi;(x) \rightarrow B;x(F)) \hat{e} S^{**}(L))$ om $G \hat{e} Ax(J;0,L)$. Dette følger i lys av (6). At C er lukket under modus ponens og universell generalisering følger siden alle instanser av (5) er aksiomer i S** og fordi (7) er en slutningsregel i S**.

(b) Vi viser dernest: S**(L) Inkl S*(L). Vi behøver da bare å vise at slutningsregelen (7) kan utledes i S*. Anta $(S^{*},L) :- (\pi;0(x) \rightarrow B;x(F))$. Da har man at i lys av Teorem 6.1 at $F \hat{e} Th(J;0,L)$. Da har man at $(Ax)F \hat{e} Th(J;0,L)$ – siden J;0-teoremene er lukket under universell generalisering – og følgelig igjen ved hjelp av Teorem 6.1 at $(S^{*},L) :- (\pi;0(x) \rightarrow B;x((Ay)F))$. **Q.E.D.**

I det neste kapitlet skal vi generalisere den fremgangsmåten som vi her har gitt et eksempel på og bevise to meget generelle kompletthetsteoremer som er beslektet med dem vi beviste i Kapittel V. Denne fremgangsmåten kunne man si at representerer vår løsning på problemet om "logisk allvitenhet" i forbindelse med slike intensjonale operatorer som "vet at", "tror at" etc. Betrakter vi kalkylen ovenfor er det naturligvis tvilsomt om det finnes noe individ som er slik at $\pi;0(x)$. Kanskje dette er en empirisk umulighet. Men i logikken behøver man ikke nødvendigvis å være opptatt av, eller ta hensyn til, empiriske begrensninger. Fra en logisk synsvinkel kan man være interessert i å besvare spørsmål om f.eks. konsistensen til visse antagelser, hva som følger fra dem, om de er uavhengige av hverandre osv. Når det gjelder tro og viten kan det derfor være av interesse nettopp å kunne gi tilfredstillende svar på f.eks, om det er logisk mulig at det kan være slik at $B;x( (Ey)(B;y(F) \& \neg B;y(\neg\neg F))$ om man går med på den idealiserende antagelse at trosfeltet til x er lukket under J;0-konsekvens. Som man ser er dette mulig. Det er faktisk mulig å spesifisere en J;0-modell der man har at $\pi;0(x) \& B;x( (Ey)(B;y(F) \& \neg B;y(\neg\neg F)))$ er oppfylt. Derimot kan man vise at den følgende formel er logisk gyldig:

(8) $\neg(Ex)(\pi;0(x) \& \neg B;x( \neg(Ey)(\pi;0(y) \& B;y(F) \& \neg B;y(F))))$

Vi avslutter dette kapitlet med å oppfordre leseren til å gi et bevis for at dette er et teorem i S*.

# Kapittel VII

Generelle fullstendighetsresultater II

## §1 Spesielle predikater. Logikk-karakteristikker. L-systemer.

For å kunne gi en systematisk fremstilling av fremgangsmåten beskrevet i forrige kapittel er det nødvendig å redefinere begrepene J;0-språk og I;0-språk. Vi lar N;1 stå for {1,2,3,4,....}, dvs. de naturlige tallene uten null. J;0-språk i den nye betydningen er definert nøyaktig som før, men med følgende unntak: Vi tenker oss at i UN/nêN/(Pred;n(L)) har vi en spesiell kategori med predikater indeksert en-entydig på N;1XN;1. Indekseringsfunsjonen betegner vi med π. Er <m,n>êN;1XN;1 er π;<m,n> et m-ært predikat. Vi skal kalle disse nye predikatene for spesielle predikater og vi vil regne dem blandt de logiske symbolene i et J;0-språk. Indekseringsfunksjonen π vil også bli regnet med til det logiske vokabularet. To språk har bare det samme logiske vokabularet om denne indekseringsfunksjonen er den samme.

Vi gjør nøyaktig de samme forandringene i definisjonen av I;0-språk. Vi definerer så alle de begrepene vi har innført i tidligere kapitler akkurat som før. Men de vil nå ha en litt forandret betydning siden de blir definert relativt til J;0(I;0)-språk i den nye betydningen. Er g en L-morfi fra et J;0-språk L;1 over i et J;0-språk L;2 krever vi at g(π;<m,n>) = π;<m,n> for alle <m,n>êN;1XN;1. Tilsvarende om L;1 og L;2 er I;0-språk. Som før lar vi (I;0)* og og (J;0)* stå for henholdsvis klassen av alle I;0-språk og klassen av alle J;0-språk. Vi tenker oss at vi har fastsatt en mengde Iê[(I;0)*/≈;I] og en mengde Jê[(J;0)*/≈;J]. Her betegner ≈;I den ekvivalensrelasjonen som består mellom to I;0-språk hvis og bare hvis de har nøyaktig det samme logiske vokabularet. Med andre ord har man <L,L'>ê≈;I hvis og bare hvis L,L' begge er I;0-språk og det logiske vokabularet til L er det samme som det logiske vokabularet til L'. "≈;J" betegner den tilsvarende relasjonen mellom J;0-språk. "[(I;0)*/≈;I]" betegner kvotientmengden til (I;0)* med hensyn på ekvivalensrelasjonen ≈;I. Tilsvarende betegner "[(J;0)*/≈;J]" kvotientmengden til (J;0)* med hensyn på ekvivalensrelasjonen ≈;J.

I det følgende lar vi "H" være plassholder for enten "I" eller "J". Som nevnt vil vi tenke oss at I og J er fiksert i resten av kapitlet.

Med en *logikk-karakteristikk over H* forstår vi en funksjon ∑ som til hvert par <m,n>êN;1XN;1 tilordner en systemkarakteristikk Ç av grad m over H. Vi skriver av og til ∑;<m,n> istedet for ∑(<m,n>). Med et *L-system over H* forstås et ordnet par <∑,Ç> der ∑ er en logikk-karakteristikk over H og Ç er en systemkarakteristikk over H.

La nå LêJ og la <∑,Ç> være et L-system over J. Vi definerer en klasse av J;0-modeller for L bestemt av <∑,Ç>, Mod;(J;0)([∑,Ç],L), ved å sette at en modell RêMod;(J;0)([∑,Ç],L) hvis og bare hvis R oppfyller de følgende krav:

(i) T(Ç,R)
(ii) ∏(R)(π;<m,p>) Inkl Mg(<x;1,...,x;m>: <x;1,...,x;m>ê|R|^m &
(Aa)(aê∑;<m,p> –> Sat(<x;1,...,x;m>,a,R))
(iii) ∏(R)(π;<m,p>) Inkl ∏(R)(π;<m,q>) om ∑;<m,q> Inkl ∑;<m,p>

Vi går frem på tilsvarende måte i forbindelse med I;0-språk: La nå LêI og la <∑,Ç> være et L-system over I. Vi definerer en klasse av seminormale I;0-modeller for L bestemt av <∑,Ç>, Sem;(I;0)([∑,Ç],L), ved å sette at en modell RêSem;(I;0)([∑,Ç],L) hvis og bare hvis R oppfyller de følgende krav:

(i) T(Ç,R)
(ii) ∏(R)(π;<m,p>) Inkl Mg(<x;1,...,x;m>: <x;1,...,x;m>ê|R|^m &
(Aa)(aê∑;<m,p> –> Sat(<x;1,...,x;m>,a,R))
(iii) ∏(R)(π;<m,p>) Inkl ∏(R)(π;<m,q>) om ∑;<m,q> Inkl ∑;<m,p>

Vi skal nå, omtrent på samme måte som i Kapittel V definere en rekke utvidelser av systemene I;0 og J;0.

## §2 Spesielle aksiomklasser.

Vi lar fremdeles "H" være plassholder for enten "I" eller "J". La LêH og anta aê(In;<n,m>(H)). Anta <m,p>^N;1XN;1 Vi skal definere en mengde av formler i L som er bestemt av indekssystemet a og indeksen <m,p>. Denne mengden av formler betegner vi med D(<m,p>,a,L). D(<m,p>,a,L) er bestemt på den følgende måte:

**Definisjon 3.1** Anta a= <[<m,q;1>,....,<m,q;(n+1)>], F,¥,r> er et n-ært indekssystem av grad m over H. Anta <m,p>êN;1XN;1. Da er D(<m,p>,a,L) definert ved tilfelle ettersom r=0,1,2 på den følgende måte:

Tilfelle (i): r=0. Da har ¥ karakteristikk <n,m>. I så fall er Gê(D(<m,p>,a,L)) hvis og bare hvis G er

(1) π;<m,p>(x;1,...,x;m) –>.
T;<m,q;1>(x;1,...,x;m,F;1) & .... & T;<m,q;n>(x;1,...,x;m,F;n) –>
T;<m,q;(n+1)>(x;1,...,x;m, ¥(F;1,...,F;n,x;1,...,x;m))

for visse formler og variabler F;1,...,F;n,x;1,...,x;m i L, og hvor man har at leddet T;<m,q;k>(x;1,...,x;m,F;k) er utelatt om F(k)=0, og der man dessuten har at

<F;1,...,F;n,x;1,....,x;n>ê(B;<n,m>(L) Ω Dom(¥))

Tilfelle (ii): r=1. Da har ¥ karakteristikk <n,j> for noe jêN. I så fall er Gê(D(<m,p>,a,L)) hvis og bare hvis G er

(1) π;<m,p>(x;1,...,x;m) –>.
T;<m,q;1>(x;1,...,x;m,F;1) & .... & T;<m,q;n>(x;1,...,x;m,F;n) –>
T;<m,q;(n+1)>(x;1,...,x;m, ¥(F;1,...,F;n,y;1,...,y;p))

for visse formler og variabler F;1,...,F;n,t;1,...,t;m,y;1,...,y;p i L og hvor man har at leddet T;<m,q;k>(x;1,...,x;m,F;k) er utelatt om F(k)=0, og der man dessuten har at

<F;1,...,F;n,y;1,....,y;p>ê(B;<n,p>(L) Ω Dom(¥))

Tilfelle (iii): r=2. Da har ¥ karakteristikk <n,0>. I så fall er Gê(D(<m,p>,a,L)) hvis og bare hvis G er

(1) π;<m,p>(x;1,...,x;m) –>.
T;<m,q;1>(x;1,...,x;m,F;1) & .... & T;<m,q;n>(x;1,...,x;m,F;n) –>
¬T;<m,q;(n+1)>(x;1,...,x;m, ¬¥(F;1,...,F;n))

for visse formler F;1,...,F;n i L og hvor man har at leddet T;<m,q;k>(x;1,...,x;m,F;k) er utelatt om F(k)=0, og der man dessuten har at

<F;1,...,F;n>ê(B;<n,0>(L) Ω Dom(¥))

Dermed er formelmengden D(<m,p>,a,L) definert om <m,p>êN;1XN;1, a er et n-ært indekssystem av grad m og LêH.

La ∑ være en logikk-karakteristikk over H. Da definerer vi H;1(∑,L), som er en formelmengde i L, der LêH, ved å sette:

H;1(∑,L) = UN/<m,p>êN;1XN;1/(UN/aê∑;<m,p>/(D(<m,p>,a,L)))

Vi definerer en mengde H;2(∑,L) Inkl Fml(L) ved å sette at GêH;2(∑,L) hvis og bare hvis G er:

π;<m,p>(x;1,...,x;m) –> π;<m,q>(x;1,...,x;m)

for noen <m,p>,<m,q>êN;1XN;1 der man har ∑;<m,q> Inkl ∑;<m,p>.

∑-*aksiomene i L*, Ax(∑,L) er mengden H;1(∑,L)U H;2(∑,L) der LêH.

Anta <∑,Ç> er et L-system over J. Vi sier da at <∑,Ç> *er tillatt med hensyn på J* hvis og bare hvis vi har at Ax(∑,L) U Ax(Ç,L) Inkl Val;L(Mod;(J;0)([∑,Ç],L)).
Tilsvarende når det gjelder I:

Anta <∑,Ç> er et L-system over I. Vi sier da at <∑,Ç> *er tillatt med hensyn på I* hvis og bare hvis vi har at Ax(∑,L) U Ax(Ç,L) Inkl Val;L(Sem;(I;0)([∑,Ç],L)).

## §3 Systemene I:0[∑,Ç] og J:0[∑,Ç]

La <∑,Ç> være et L-system over H, Vi bruker i det følgende "H;0" som plassholder for enten "J;0" eller "I;0". La LêH. Med H;0[∑,Ç]-aksiomene i L forstås unionen av H;0-aksiomene i L og Ç-aksiomene i L og Ax(∑,L) dvs. :

Ax(H;0,L) U Ax(Ç,L) UAx(∑,L).

Vi betegner H;0[∑,Ç]-aksiomene i L med "Ax(H;0[∑,Ç], L)". Med H;0[∑,Ç] - teoremene i L , Th(H;0[∑,Ç], L), forstår vi den minste formelmengden X i L der Ax(H;0[∑,Ç],L) er inkludert i X og der X er lukket under modus ponens og universell generalisering. Med en H;0[∑,Ç]-teori med aksiom mengde Δ forstår vi en mengde T Inkl Fml(L) der T =ß(Δ, H;0[∑,Ç],L). Det bemerkes at ß(Δ, H;0[∑,Ç],L) der Δ er en formelmengde i L og LêH er definert som de minste mengden X inkl Fml(L) der man har:

(i) ΔUAx(H;0[∑,Ç],L) Inkl X
(ii) X er lukket under modus ponens og universell generalisering.

Vi bemerker at for enhver Δ Inkl Fml(L) der LêH finnes det en og bare en H;0[∑,Ç]-teori i L med aksiommengde Δ. Er T = ß(Δ,H;0[∑,Ç],L) kaller vi Δ for de ikke-logiske aksiomene i T. Ax(H;0[∑,Ç],L) kalles for de logiske aksiomene i T.

Vi definerer predikatene "H;0[∑,Ç]-bevis i L", "H;0[∑,Ç]-bevis i L for F", "F er H;0[∑,Ç]-bevisbar i L", "H;0[∑,Ç]-bevis i L ut fra Δ", "H;0[∑,Ç]-bevis i L for F ut fra Δ", "F er H;0[∑,Ç]-bevisbar i L ut fra Δ" nøyaktig som i Kapittel III, §1, i det vi i disse definisjonene erstatter enhver forekomst av "I;0" med "H;0[∑,Ç]" og forstår ved "H;0[∑,Ç]-språk" det samme som "H;0-språk".

Vi bruker "(H;0[∑,Ç],L) :– F" i stedet for "F er H;0[∑,Ç]-bevisbar i L", og "(H;0[∑,Ç],L,Δ) :– F" i stedet for "F er H;0[∑,Ç]-bevisbar i L ut fra Δ" når det er passende. Er T=ß(Δ, H;0[∑,Ç],L) skal vi også av og til skrive "T :– F" isteden for det mer klumsete uttrykket "(H;0[∑,Ç],L,Δ) :– F". Det skulle da være klart at man har T :– F hvis og bare hvis FêT.

Videre bemerker vi at :

Th(H;0,L) Inkl Th(H;0[∑,Ç],L) Inkl ß(Δ,H;0[∑,Ç],L). D

Det er også lett å se at ß(Δ,H;0, L) Inkl ß(Δ,H;0[∑,Ç],L) når Δ er en formelmengde i L og L er et språk i H.

Man skulle nå lett innse at Teorem 3.3 – Teorem 3.6 og Korollar 3.7 i Kapittel III, §3, dvs. henholdsvis deduksjonsteoremet, konstant-teoremet, reduksjons-teoremet, og reduksjonsteoremet for konsistens med korollar, holder om vi i hver av formuleringene i disse teoremene erstatter "S" med "H;0[∑,Ç]" og forstår med et "H;0[∑,Ç]-språk" det samme som et H;0-språk. Bevisene vil fremdeles i det vesentlige være som i Shoenfield [1], §3.3 og §4.1.

Beviset for konstant-teoremet kan gjennomføres hovedsakelig som der, men vi merker oss at om FêAx([∑,Ç],L) = Ax(∑,L)UAx(Ç,L), og e;1,...,e;m er distinkte konstanter og y;1,...,y;m variabler som ikke forekommer i F så vil F;(e;1,...,e;m)[y;1,...,y;m] være med i Ax([∑,Ç],L), siden de syntaktiske operasjonene som ligger gjemt i ∑ og Ç er normale og derfor substitusjons-invariante. Det er dette forhold som gjør at man kan gjennomføre beviset for konstant-teoremet.

La T = ß(Δ,H;0[∑,Ç],L) være en H;0[∑,Ç]-teori i L. Vi definerer da hva som menes med at T er en Henkin-teori og at T er en komplett teori nøyaktig som i §3 i Kapittel III, men erstatter "S" med "H;0[∑,Ç]" overalt i definisjonene.

Er T = ß(Δ,H;0[∑,Ç],L) lar vi T;c være ß(Δ',H;0[∑,Ç],L;c), der L;c er definert som i §3 i Kapittel III, og Δ' er Δ utvidet med alle de spesielle aksiomene for de spesielle konstantene i L;c. T;c er da en Henkin-teori som er konsistent om T er konsistent. Vi kan som i Shoenfield [1], §4.2 bevise de følgende to hjelpe-setninger:

**Lemma 3.1** La T = ß(Δ,H;0[∑,Ç],L) være en H;0[∑,Ç]-teori i L (LêH). Da er T;c en konservativ utvidelse av T.

**Lemma 3.2** La T = ß(Δ,H;0[∑,Ç],L) være en konsistent H;0[∑,Ç]-teori i L, der L er et H;0-språk. Da finnes det en komplett H;0[∑,Ç]-teori ß(Δ',H;0[Ç],L) der
Δ Inkl Δ' Inkl Fml(L).

Vi har nå for enhvert L-system <∑,Ç> over J definert en logikk J;0[∑,Ç] som er en utvidelse av J;0. Tilsvarende har vi for hvert L-system <∑,Ç> over I definert en logikk I;0[∑,Ç]. I det neste avsnittet skal vi vise at ethver slik logikk er fullstendig forutsatt at [∑,Ç] er tillatt med hensyn på J (eventuelt I).

## §4 Et generelt fullstendighetsteorem for kalkylen J:0[∑,Ç]

Vi skal bevise det følgende, meget generelle teorem:

**Teorem 4.1** Anta <∑,Ç> er et tillatt L-system over J. Anta videre at L,L'êJ. Da har man at følgende påstander holder:

(a) La T = ß(Δ,J;0[∑,Ç], L) være en J;0[∑,Ç]-teori i L. Anta RêMod;(J;0)([∑,Ç],L) og at R:= Δ. Da har man at R:= T.

(b) Anta T' = ß(Δ',J;0[∑,Ç], L') er en konsistent J;0[∑,Ç]-teori i L'. Da finnes det en modell R'êMod;(J;0)([∑,Ç],L') slik at R' := T'.

**Bevis:** Vi gir først et bevis for punkt (a). Siden <∑,Ç> er tillatt med hensyn på J har man:

Ax(∑,L) U Ax(Ç,L) Inkl Val;L(Mod;(J;0)([∑,Ç],L)) Inkl Val;L({R}) siden RêMod;(J;0)([∑,Ç],L). I lys av forutsetningene har vi: Δ Inkl Val;L({R}) og ved hjelp av gyldighetsteoremet for J;0 har man:

Ax(J;0,L) Inkl Val;L({R}). Det følger at Ax([∑,Ç],L) UΔ Inkl Val;L({R}). Siden Val;L({R}) åpenbart er lukket under modus ponens og universell generalisering følger at T Inkl Val;L({R}), dvs. R:= T.

Vi gir så et bevis for punkt (b):
La T' = ß(Δ',J;0[∑,Ç], L') er en konsistent J;0[∑,Ç]-teori i L'. Vi antar <∑,Ç> er tillatt med hensyn på J. I følge Lemma 3.1 og Lemma 3.2 i §3 kan T' utvides til en komplett Henkin-

teori T = ß(Δ, J;0[∑,Ç],L) der L er en utvidelse av L' med spesielle konstanter og der Δ' Inkl Δ. Vi konstruerer så en modell R;T for L der:

R;T =<m;T, g;T, ∏;T> og hvor

m;T = <*;T, D;T, f;T,£;T,<*f*;T(<m,n>)>/<m,n>êNXN>

som er med i Mod;(J;0)(L) på nøyaktig samme måte som i fullstendighetsbeviset for J;0 i Kapittel IV, men vi definerer nå selvfølgelig alle komponentene i R;T og m;T relativt til J;0[∑,Ç]-teorien T. På samme måte som i beviset for Teorem 1.1 i Kapittel IV kan man så bevise:

(1) R;T := T.

Faktisk vil beviset være ordrett som i §1 i Kapittel IV unntatt ved at vi erstatter enhver forekomst av "ß(Δ,J;0,L)" med ß(Δ,J;0[∑,Ç],L). Man kan derfor oppfatte (1) som etablert.

Vi må imidlertid også vise at:

(2) R;TêMod;(J;0)([∑,Ç],L)

Vi vil da ha at R;T|L'êMod;(J;0)([∑,Ç],L') siden L bare er en utvidelse av L' med konstanter. Siden Lemma 3.1 og Lemma 3.2 i Kapittel III, §3 holder om "S" erstattes med "J;0[∑,Ç]" kan vi så ved hjelp av (1) slutte at R;T|L' := T'. At Lemma 3.1 og 3.2 i Kapittel III holder med disse forandringene er lett å verifisere og beviset overlates til leseren.

Vi vil derfor ha bevist punkt (b) om vi kan gi et bevis for (2). Etter definisjonen av "Mod;(J;0)([∑,Ç],L)" (Se §1) er det tilstrekkelig å vise følgende:

(I) T(Ç,R;T)

(II) ∏(R;T)(π;<m,q>) Inkl Mg(<x;1,...,x;m>: <x;1,...,x;m>ê|R;T|^m &
(Aa)(aê∑;<m,q> –> Sat(<x;1,...,x;m>,a,R;T))

(III) ∏(R;T)(π;<m,p>) Inkl ∏(R;T)(π;<m,q>) om ∑;<m,q> Inkl ∑;<m,p>

Vi beviser (I) på nøyaktig samme måte som i beviset for Teorem 6.1 i §6 i Kapittel V. Faktisk kan beviset vi ga der overtas ordrett som det står med det unntak at vi overalt erstatter "ß(Δ,J;0[Ç],L)" med "ß(Δ,J;0[∑,Ç],L)". Vi anser derfor (I) som godtgjort.

Beviset for (III) er temmelig likefrem:

Anta <x;1,...,x;m>ê∏(R;T)(π;<m,p>). Da finnes det konstanter c;1,...,c;m i L slik at x;i = ∂([c;i]) for i=1,...,m og der man har T :– π;<m,p>(c;1,...,c;m). Siden ∑;<m,q> Inkl ∑;<m,p> har vi:

(π;<m,p>(x;1,...,x;m) –> π;<m,q>(x;1,...,x;m))êH;2(∑,L) Inkl Ax(∑,L) Inkl T

Det følger at:

T :– (π;<m,p>(c;1,...,c;m) –> π;<m,q>(c;1,...,c;m)) og derfor at:

T :– π;<m,q>(c;1,...,c;m). Fra dette kan man i sin tur slutte:

<x;1,...,x;m>= <∂([c;1]),...,∂([c;m])>ê∏(R;T)(π;<m,q>). Dette viser at (III) holder.

Det gjenstår å gi et bevis for (II). Beviset for (II) blir temmelig langt om det skal gjennomføres helt detaljert og skrives helt ut. Vi vil derfor benytte oss av formuleringene og nummereringen av formlene i beviset for punkt (b) i Teorem 6.1 i §6, Kapittel V.

*Bevis for (II):* Anta (i) <x;1,...,x;m>ê∏(R;T)(π;<m,q>)) og dessuten at

(ii) aê∑;<m,q>. Da har man i følge definisjonen av ∑ at aê(In;<n,m>(J)) for noe nêN.

Det følger at:

(iii) a= <[<m,q;1>,....,<m,q;(n+1)>], F*,¥,r>

for noen q;1,...,q;(n+1), F*,¥,r der disse komponentene er beskrevet slik som tidligere. Fra (i) følger:

(4) <x;1,...,x;m>ê|R;T|^m

Vi må nå vise:

(3) Sat(<x;1,...,x;m>,a,R;T)

For å bevise (3) sondrer vi mellom tre tilfeller alt ettersom r=0,1,2. Beviset vil nå være nøyaktig som beviset for Teorem 6.1 i §6, Kapittel V om man gjør de følgende forandringer:

Vi erstatter enhver forekomst av "ß(Δ,J;0[Ç],L)" med "ß(Δ,J;0[∑,Ç],L)". Vi erstatter

"E(a,L)" overalt med "D(<m,q>,a,L)". Vi skyter inn "π;<m,q>(y;1,..,y;m)" som antesedent i formel (21) og "π;<m,q>(t';1,..,t';m)" som antesedent i formel (25) i den nevnte paragraf i Kapittel V. Videre skyter vi inn π;<m,q>(y;1,..,y;m)" i antesedenten i formlene (48) og (69) og "π;<m,q>(c;1,..,c;m)" i antesedenten i formlene (51) og (73). Videre lar vi den nest siste setningen i Tilfelle (i) begynne med " (32), (i) og (25) impliserer ...". Den nest siste setningen i Tilfelle (ii) lar vi begynne med "Dette, (i) og (51) impliserer:" istedenfor "Dette og (51) impliserer:". I Tilfelle (iii) gjør vi i tillegg denne forandringen: Vi ser på setningen i §6 i Kapittel V, Tilfelle (iii), som inneholder formel (79). Denne begynner med "(73) og (78) impliserer:". Vi lar den nå i stedet begynne slik: "(i), (73) og (78) impliserer:". Gjøres nå disse og bare disse forandringene i avsnittet fra og med Tilfelle (i) til og med Tilfelle (iii) i §6 i Kapittel V vil vi umiddelbart ha for oss et bevis for (3) ovenfor. Leseren kan selv utføre disse forandringene og overbevise seg om at et bevis fremkommer.

Vi anser dermed (II) ovenfor som bevist. Men dermed har vi gitt et bevis for (2) ovenfor. Dette avslutter beviset for Teorem 4.1. **Q.E.D.**

## §5 Et generelt fullstendighetsteorem for kalkylen I:0[∑,Ç]

Vi skal bevise det følgende teorem som er analogt med Teorem 4.1 i §4:

**Teorem 5.1** Anta <∑,Ç> er et tillatt L-system over I. Anta videre at L,L'êI. Da har man at følgende påstander holder:

(a) La T = ß(Δ,I;0[∑,Ç], L) være en I;0[∑,Ç]-teori i L. Anta RêSem;(I;0)([∑,Ç],L) og at R:= Δ. Da har man at R:= T.

(b) Anta T' = ß(Δ',I;0[∑,Ç], L') er en konsistent I;0[∑,Ç]-teori i L'. Da finnes det en modell R'êSem;(I;0)([∑,Ç],L') slik at R' := T'.

**Bevis:** Beviset for punkt (a) er nøyaktig som beviset for punkt (a) i Teorem 4.1.
Vi gir så et bevis for punkt (b) i teoremet.

Anta T' = ß(Δ',I;0[∑,Ç], L') er en konsistent I;0[∑,Ç]-teori i L' i det vi forutsetter at <∑,Ç> er et tillatt L-system med hensyn på I. I følge Lemma 3.1 og 3.2 i §43kan T' utvides til en komplett Henkin-teori T=ß(Δ, I;0[∑,Ç],L) der L er en utvidelse av L' med konstanter og Δ' Inkl Δ. Vi konstruerer nå en modell

R* = <m*, g*,∏*> hvor

m* = <*, D*, f*,£*,<*f*(<m,n>)>/<m,n>êNXN,G*>

som er med i Mod;(I;0)(L) på nøyaktig samme måte som i fullstendighetsbeviset for I;0 i Kapittel IV. (Se beviset for Teorem 2.1 i Kapittel IV). De forskjellige komponentene i R* og m* defineres så nøyaktig som i beviset for Teorem 2.1 i Kapittel IV, unntatt at vi nå definerer dem relativt til teorien T=ß(Δ,I;0[∑,Ç],L). Det kan bemerkes at R* fremkommer fra R;T ved passende modifikasjoner beskrevet i Kapittel IV. På samme måte som i beviset for Teorem 2.1 i kapittel IV kan man så bevise:

(1) R* := T.

Faktisk vil beviset være ordrett som i §2 i Kapittel IV unntatt ved at vi erstatter enhver forekomst av "ß(Δ,I;0,L)" med ß(Δ,I;0[∑,Ç],L). Man kan derfor oppfatte (1) som etablert.

Vi må imidlertid vise:

(2) R*êSem;(I;0)([∑,Ç],L)

Vi vil da ha at R*|L' êSem;(I;0)([∑,Ç],L') siden L bare er en utvidelse av L' med konstanter. Siden Lemma 3.1 og Lemma 3.2 i Kapittel III, §3 holder om "S" erstattes med "I;0[∑,Ç]", i det vi forstår med en "I;0[∑,Ç]-modell" det samme som en modell RêSem;(I;0)([∑,Ç],L), vil det så følge ved hjelp av (1) at R*|L' := T'. At Lemma 3.1 og 3.2 i Kapittel III holder med

disse forandringene er lett å verifisere og beviset overlates til leseren.

Vi vil derfor ha bevist punkt (b) om vi kan gi et bevis for (2). I lys av definisjonen av "Sem;(I;0)([∑,Ç],L)" er det tilstrekkelig å bevise:

(I) T(Ç,R*)

(II) ∏(R*)(π;<m,q>) Inkl Mg(<x;1,...,x;m>: <x;1,...,x;m>ê|R*|^m &
(Aa)(aê∑;<m,p> –> Sat(<x;1,...,x;m>,a,R*))

(III) ∏(R*)(π;<m,p>) Inkl ∏(R*)(π;<m,q>) om ∑;<m,q> Inkl ∑;<m,p>

Vi beviser (I) på nøyaktig samme måte som vi gjorde i beviset fro Teorem 7.1 i §7, Kapittel V. Faktisk kan der beviset vi gav der overtas ordrett som det står med det unntak at vi overalt erstatter "ß(Δ,I;0[Ç],L)" med "ß(Δ,I;0[∑,Ç],L)". Vi anser derfor (I) som godtgjort.

Beviset for (III) er greit og nøyaktig som beviset for (III) i forrige paragraf.
Det gjenstår å gi et bevis for (II). Beviset for (II) blir temmelig langt om det skal gjennomføres helt detaljert og skrives helt ut. Vi vil derfor benytte oss av formuleringene og nummereringen av formlene i beviset for punkt (b) i Teorem 6.1 i §6, Kapittel V siden beviset i nesten alle henseende vil forløpe likedan.

*Bevis for (II):* Anta (i) <x;1,...,x;m>ê∏(R;T)(π;<m,q)) og dessuten at
(ii) aê∑;<m,q>. Da har man i følge definisjonen av ∑ at aê(In;<n,m>(J)) for noe nêN.
Det følger at:

(iii) a= <[<m,q;1>,....,<m,q;(n+1)>], F*,¥,r>

for noen q;1,...,q;(n+1), F*,¥,r der disse komponentene er beskrevet slik som tidligere. Fra (i) følger:

(4) <x;1,...,x;m>ê|R;T|^m siden |R;T| = |R*|

Vi må nå vise:

(3) Sat(<x;1,...,x;m>,a,R*)

For å bevise (3) sondrer vi mellom tre tilfeller alt ettersom r=0,1,2. Beviset vil nå være nøyaktig som beviset for Teorem 6.1 i §6, Kapittel V, Tilfelle (i) – (iii) om man gjør de følgende forandringer:

Vi erstatter enhver forekomst av "ß(Δ,J;0[Ç],L)" med "ß(Δ,I;0[∑,Ç],L)". Vi erstatter "E(a,L)" overalt med "D(<m,q>,a,L)". Vi skyter inn "π;<m,q>(y;1,..,y;m)" som antesedent i formel (21) og "π;<m,q>(t';1,..,t';m)" som antesedent i formel (25) i den nevnte paragraf i Kapittel V. Videre erstatter vi formel (6), "F;kê*f*;T(<m,q(k)>)(x;1,...,x;m)" med "F;kê*f**;<m,q(k)>(x;1,...,x;m)" og setningen som begynner med "6) og (7) gir en:" og som inneholder formel (8) lar vi nå begynne slik"(6) og (7) gir oss i kraft av definisjonen av *f**;<m,q(k)>". Videre lar vi den siste setningen i Tilfelle (i) nå lyde slik:
"(i), (32) og (25) impliserer:

T :– T;<m,q(n+1)>(t';1,...,t';m,¥(H';1,...,H';n,t';1,...,t';m)).

Dette impliserer i kraft av definisjonen av *f**;<m,q(n+1)>, (18) og (19) at:

¥(F;1,...,F;n,f;T(x;1),..,f;T(x;m)) ê*f**;<m,q(n+1)>(x;1,...,x;n) som er det vi ønsker.".

Når det gjelder Tilfelle (ii) i §6, Kapittel V gjør vi de følgende forandringer:
Vi innskyter "π;<m,q>(c;1,...,c;m)" i antesedenten i formel (51) og "π;<m,q>(y;1,...,y;m)" i antesedenten i formel (48). Videre forandrer vi formel (34) til "F;kê*f**;<m,q(k)>(x;1,...,x;m)" og den setningen som begynner "Dette og (34) gir en: (36)" lar vi nå begynne slik: "Dette og (34) gir oss i kraft av definisjonen av "*f**;<m,q(k)>" at (36) ....". De to siste setningene i Tilfelle (ii) lar vi nå lyde slik: " Dette, (i) og (51) impliserer

T :– T;<m,q(n+1)>(c;1,...,c;m,¥(H';1,...,H';n,t';1,...,t';p)) som i lys av (47) og definisjonen av *f**;<m,q(k+1)> gir os det vi ønsker, nemlig:

¥(F;1,...,F;n,k;1,..,k;p) ê*f**;<m,q(n+1)>(x;1,...,x;n) i lys av (35)"

Tilslutt gjør vi de følgende forandringer i Tilfelle (iii) i §6, Kapittel V:
Vi innskyter "π;<m,q>(c;1,...,c;m)" i antesedenten i formel (73) og "π;<m,q>(y;1,...,y;m)" i antesedenten i formel (69). Videre forandrer vi formel (58) til "F;kê*f**;<m,q(k)>(x;1,...,x;m)" og den setningen som begynner "(58) og (59) gir en" lar vi nå begynne slik: "(58) og(59) gir oss i kraft av definisjonen av *f**;<m,q(k)> at (60) F;kê*f*;T(<m,q(k)>)(∂([c;1]),...,∂([c;m])) for de k der F*(k) = 1".
Den siste setningen i Tilfelle (iii) som begynner med "Det følger at man må ha:" endrer vi nå slik at den i sin helhet ser slik ut:
"Det følger at man må ha: ¬[(¬¥(F;1,...,F;n)) ê*f*;T(<m,q(n+1)>)(∂([c;1]),...,∂([c;m]))].
Men herav følger i kraft av definisjonen av *f**;<m,q(n+1)> og det faktum at (¬¥(F;1,...,F;n))êCFml(L;T) at ¬[(¬¥(F;1,...,F;n)) ê*f**;<m,q(n+1)>(x;1,...,x;m)] som nettopp er det vi ønsker."

Gjøres nå disse forandringene i Tilfelle (i) – (iii) i §6, Kapittel V vil man umiddelbart få et bevis for (3) ovenfor. Leseren kan selv gjøre disse forandringene og overbevise seg om at et bevis fremkommer som resultat. Vi anser derfor (II) som bevist. Men dermed har vi gitt et bevis for (2) i denne paragrafen. Dette avslutter beviset for Teorem 5.1. **Q.E.D.**

# Kapittel VIII

## Anvendelser. Craigs interpolations-teorem i intensjonal logikk

## §0 Innledende bemerkninger.

I dette kapitlet skal vi gjøre rede for en del anvendelser av kompletthetsteoremet for J;0[Ç]. Hovedresultatet er et teorem som sier at Craigs interpolasjonsteorem gjelder for logikken J;0[Ç] hvis systemkarakteristikken Ç oppfyller en bestemt betingelse, det er tilstrekkelig at den er regulær og svakt konstruerbar. Dette teoremet er meget generelt og det blir formulert og bevist i §8.[28] For å oppnå dette resultatet begrenser vi oss til å betrakte en noe snevrere klasse av J;0-modeller enn dem vi hittil har brukt. Vi kaller modellene i denne mindre omfangsrike klassen av J;0-modeller for *standardmodeller.* Denne klassen av modeller defineres i §1. I §1 redefinerer vi også hva som menes med restriksjonen av en modell for språket L til et språk L', og omvenft, hva som menes med en ekspansjon av en modell for L til et rikere språk L'. I forbindelse med dette innfører vi begrepene 'ekspanderbar systemkarakteristikk' og 'konstruerbar systemkarakteristikk'. I §2 beviser vi en viktig hjelpesetning om forholdet mellom J;0-modeller av første og annet slag som vi har bruk for senere. I §3 defineres hva som menes med isomorfi mellom to J;0-modeller. Vi beviser noen viktige hjelpesetninger i denne forbindelse. I §4 innfører vi begrepene Δ-substruktur, elementær substruktur og Δ-diagram og beviser et viktig teorem, modellekstensjonsteoremet. I §5 generaliserer vi så begrepet 'elementær kjede' og begrepet 'unionen av en elementær kjede' slik at det passer for våre modeller. Det viktigste resultatet her er en hjelpesetning vi har kalt for "Tarski's lemma". §6 inneholder igjen beviset for et lemma vi har bruk for og i §7 beviser vi den ene halvdelen av vårt hovedteorem. Den andre halvdelen blir bevist i §8.

I §9 defineres en klasse med systemkarakteristikker som vi kaller regulære. Vi viser her at enhver regulær systemkarakteristikk er ekspanderbar. Dette teoremet, hvor beviset er temmelig langt, er viktig for å kunne anvende resultatene i §8 på konkrete logikker av typen J;0[Ç]. I §10 illustrerer vi anvendelsesmulighetene til vårt hovedteorem ved å vise at Craigs interpolasjonsteorem holder for en rekke modallogikker. I §11 viser vi at disse logikkene er aksiomatiserbare. Det bør nevnes at den teknikken som er brukt også kan brukes på en rekke andre logikker enn dem som er omtalt her. Resultatene og metodene i dette kapitlet kan trolig også overføres på systemer av typen J;0[∑] og J;0[∑,Ç] når passende restriksjoner legges på ∑ og Ç. Vi har imidlertid ikke gransket de problemene som da oppstår nærmere.

Tilslutt må det nevnes at vår fremstilling i dette kapitlet er sterkt påvirket av fremstillingen i Shoenfield [1] og at Craigs interpolasjonsteorem er bevist for en rekke modale predikatkalkyler i Gabbay [2]. Det er imidlertid bare delvis overlapping mellom Gabbay's resultater og våe egne. Endel av hans resultater virker vanskelig tilgjengelige med våre metoder og en del av våre resultater synes vanskelige å oppnå om man vil bruke Kripke-modeller. Man bør også være klar over at Gabbay bare betrakter predikatkalkyler uten identitet, bestemte beskrivelser, funksjonssymboler og singulære termer i snever forstand. Generelle teoremer av den typen som bevises i §8 blir heller ikke bevist i Gabbay's arbeid.

## §1 Standardmodeller. Ekspanderbare og konstruerebare systemkarakteristikker. J:0-modeller av første og andre slag.

---

[28] Det vi har kalt Craigs interpolasjonsteorem ble først bevist av Craig for første-ordens logikk. (Se Craig [1]). Det bør bemerke at våre bevis er semantiske og ikke-konstruktive. Det er derfor svært lite informasjon man får om interpolasjonsformelen. Craigs interpolasjosteorem holder også for inuisjonistisk logikk og minimallogikk. Semantiske bevis som benytter Kripke-modeller er gitt i Gabbay [3]. Det bør bemerkes at artiklene Gabbay [2] og Gabbay [3] hører sammen og at de bør leses i den antydete rekkefølge. Ved hjelp av Craigs interpolasjonsteorem kan vi også lett utlede Beths definerbarhetsteorem.

La RêMod;(J;0)(L) der LêJ. Vi kaller R for en standard J;0-modell hvis og bare hvis R tilfredsstiller de følgende krav:

(i) £(R) er nøyaktig som L unntatt muligens når det gjelder konstantmengden, dvs. at £(R) har nøyaktig de samme singulære termene i snever forstand som L, de samme funksjonssymbolene som L og nøyaktig de samme predikatsymbolene som L.
(ii) Man har at g(R)(u) = u om u er en singulær term i snever forstand, et funksjonssymbol eller et predikat i L

Beviset for Teorem 6.1 i §6, Kapittel V viser at dersom T=ß(Δ,J;0[Ç],L) er en konsistent J;0[Ç]-teori i L så finnes det en standardmodell R for L som tilfredstiller Ç slik at R := T forutsatt at Ç er tillatt med hensyn på J. Vi begrenser oss heretter, når det er tale om J;0-modeller for et J;0-språk L, til å betrakte standardmodeller.

La L,L'êJ og anta L' er en utvidelse av L med noen nye ikke-logiske symboler. La R væe en J;0-modelll for L'. Med restriksjonen R'= R|L av R til L forstås J;0-modellen R' for L der man har:

(i) £(R') er £(R), men med mengden av funksjonssymboler, predikater og singulære termer i snever forstand begrenset til dem som foreligger i L
(ii) f(R')=f(R)
(iii) *f*;<m,n>(R')(a;1,...,a;m) = *f*;<m,n>(R)(a;1,...,a;m)Ω CFml(£(R')) for alle a;1,...,a;nê|R|^m og <m,n>êNXN
(iv) *(R') = *(R)
(v) |R'] = |R|
(vi) ∏(R')(u) = ∏(R)(u) om u enten er et n-ært funkjonssymbol i l (n≥1), et n-ært predikat i L (n≥1), en singulær term i snever forstand i L eller en konstant i L.

Siden vi bare arbeider med standardmodeller for L følger det at g(R')(u) = g(R)(u) om u enten er en konstant, en singulær term i snever forstand, et predikat eller et funksjonssymbol i L.

**Lemma 1.1** Anta L,L'êJ og at L' er en utvidelse av L med nye ikke-logiske symboler. Anta R er en J;0-modell for L' der man har at T(Ç,R). Da har man at:

(a) R|L er en J;0-modell for L der T(Ç,R|L)
(b) Er FêCFml(L(R)) og têCTerm(L(R)) gjelder:
  (i) g(R|L)(F) = g(R)(F)
  (ii) g(R|L)(t) = g(R)(t)
  (iii) (R|L)(F) = R(F)
  (iv) (R|L)(t) = R(t)

Merk at dersom R' er restriksjonen av R bruker vi de samme navnene i R' og R.

**Bevis:** (a) Man må vise at T(Ç, R|L). Anta aêÇ. Da har man at a er et n-ært indekssystem av grad m for noen m,n, dvs. at:

a= <[<m,q(1)>,...,<m,q(n+1)>], F*, ¥,r> for noen m,n,rêN og F*,¥ og q.

Anta r=0 og at F;kê*f*;<m,n>(R|L)(x;1,...,x;n) for de k der F*(k)=1 i det man i tillegg antar at x;1,...,x;nê|R|L| = |R] og at:

<F;1,...,F;k, f(R|L)(x;1),...,f(R|L)(x;n)>êCB;<m,n>(£(R|L))Ω Dom(¥)

Inkl CB;<m,n>(£(R))Ω Dom(¥)

Siden T(Ç,R) følger at:

(1) ¥(F;1,...,F;n,f(R)(x;1),...,f(R)(x;n))ê*f*;<m,q(n+1)>(R)(x;1,...,x;n)

Siden <F;1,...,F;k, f(R)(x;1),...,f(R)(x;n)>êCFml(£(R|L)) følger etter definisjonen av hva som menes med en syntaktisk operasjon at:

¥(F;1,...,F;k, f(R)(x;1),...,f(R)(x;n))êCFml(£(R|L))

og derfor i lys av (1) at:

¥(F;1,...,F;k, f(R)(x;1),...,f(R)(x;n))ê*f*;<m,q(n+1)>(R|L)(x;1,...,x;n).

De andre tilfellene, der r=1,2, behandles omtrent likedan og overalates til leseren.

(b) Beviset for (b) i denne hjelpesetningen er ved induksjon på lengden av velformede uttrykk. Beviset er enkelt og overlates til leseren. **Q.E.D.**

La LêJ. Vi betegner klassen av standard J;0-modeller for L med "SMod;(J;0)(L)". Vi lar "SMod;(J;0)(Ç,L)" betegne klassen av de standard J;0-modeller for L der vi har T(Ç, R), mao. hvor R oppfyller systemkarakteristikken Ç.

Anta L,L'êJ og anta at L' er en utvidelse av L med noen nye ikke-logiske symboler. Anta RêSMod;(J;0)(Ç,L). Finnes det da en R'êSMod;(J;0)(Ç,L') slik at R'|L = R skal vi kalle Ç for *ekspanderbar* med hensyn på J. Det er på ingen måte selvinnlysende at enhver systemkarateristikk Ç som er tillatt med hensyn på J også er ekspanderbrar medhensyn på J. Vi skal imidlertid vise at en meget rikholdig klasse av systemkarakteristikker Ç, vi skal kalle dem for *regulære* , er ekspanderbare.

Vi skal nå definere hva som menes med at en systemkarakteristikk Ç er "konstruerbar". Anta Ç er en systemkarateristikk som er tillatt med hensyn på J. Anta L er et vilkårlig språk i J. Anta RêMod;(J;0)(L). La L;1 og L;2 være delspråk av L slik at unionen av dem er L. L;1ΩL;2 står for det språket hvis ikke-logiske symboler er dem som er felles for L;1 og L;2. Anta R|L;1êSMod;(J;0)(Ç,L;1) og at R|L;2êSMod;(J;0)(Ç,L;2). Anta at R|(L;1ΩL;2)êSMod;(J;0)(Ç,L;1ΩL;2). Anta i tillegg at for alle <a;1,...,a;n>ê|R|^m holder:

(1) *f*;<m,n>(R)(a;1,...,a;n) =

*f*;<m,n>(R|L;1)(a;1,...,a;n) U*f*;<m,n>(R|L;2)(a;1,...,a;n)

Hvis det under disse omstendigheter finnes en R'êSMod;(J;0)(Ç,L) slik at

(i) R'|L;1 = R|L;1

(ii) R'|L;2 = R|L;2 og

(iii) R'|(L;1ΩL;2) = R|(L;1ΩL;2)

kaller vi systemkarakteristikken *Ç for konstruerbar med hensyn på J* om den også i tillegg er ekspanderbar med hensyn på J.

I lys av disse definisjonene av konstruerbare og ekspanderbare systemkarakteristikker har man at det følgende trivielle lemma holder:

**Lemma 1.2** Er Ç en konstruerbar systemkarakteristikk med hensyn på J er Ç også en ekspanderbar systemkarakteristikk med hensyn på J.

Når vi har med strenge intensjonale operatorer i språket – noe vi tenker oss at er tilfelle – må man sondre mellom to slag av J;0-modeller for et språk LêJ:

En *J;0-modell av første slag* er en J;0-modell der en formel av typen T;<m,n>(t;1,...,t;n,F)êCFml(L(R)), der <m,n> er indeksen til en streng intensjonal operator tilordnes sannhetsverdi på den følgende måte:

(a) R(T;<m,n>(t;1,...,t;n,F)) =1 <–>

(g(R)(F)ê*f*;<m,n>(R(t;1),..,R(t;1)) & R(F)=1)

En J;0-modell R for L av *annet slag* er det vi inntil nå har omtalt som en en J;0-

modell. Er <m,n> indeksen til en streng intensjonal operator krever vi av en slik modell R at:

(b) $f$;<m,n>(x;1,...,x;n) Inkl Tr;L(R) for alle x;1,...,x;nê|R|

J;0-modellene av det andre slaget er altså klassen Mod;(J;0)(L) der LêJ.

Vi skal nå bruke "Mod*;(J;0)(L)" for å betegne klassen av alle J;0-modeller av det første slaget for L. Alt det vi i tidligere kapitler har sagt om J;0-modeller holder hva enten man oppfatter dem som J;0-modeller av det første slaget eller som J;0-modeller av det andre slaget.

I det følgende skal vi bruke uttrykket "Ç er en tillatt systemkarakteristikk med hensyn på J" i en noe snevrere betydning enn den innført i Kapittel V. Vi sier at Ç er tillatt med hensyn på J hvis og bare hvis man har:

(AL)(LêJ –> (Aa)(aêÇ –> E(a,L) Inkl Val;L(Mod*;(J;0)({a},L))))

Vi bemerker at det følgende lemma holder:

**Lemma 1.3** Er RêMod;(J;0)(Ç,L), der LêJ, og har man FêCFml(L(R)) & g(R)(F)êTr;L(R) gjelder R(F)=1.

I lys av denne hjelpesetningen ser man at om RêMod;(J;0)(L) så holder (a) ovenfor. J;0-modellene av annet slag kan derfor oppfattes som en delmengde av J;0-modellene av første slag.

## §2. Lemma om forholdet mellom de to typene av modeller.

La Ç være en tillatt systemkarakteristikk med hensyn på J. Med andre ord anta at:

(AL)(LêJ –> (Aa)(aêÇ –> E(a,L) Inkl Mod*;(J;0)(Ç,L)))

Anta LêJ og at RêSMod*;(J;0)(Ç,L), Vi definerer en R'êSMod*;(J;0)(L) som er nøyaktig som R unntatt ved at vi setter:

(+) $f$;<m,n>(R')(x;1,...,x;m) = $f$;<m,n>(R)(x;1,...,x;m)ΩTr;L(R)

om <m,n> er indeksen til en streng intensjonal operator og x;1,...,x;mê|R|=|R'|.
Under disse omstendigheter gjelder:

**Lemma 2.1** La R' være definert som ovenfor. Da gjelder:

(a) R'(F) = R(F) og R'(t) = R(t) om FêCFml(L(R)) og têCTerm(L(R))

(b) $f$;<m,n>(R')(x;1,...,x;m) Inkl Tr;L(R') om <m,n> er indeksen til en streng intensjonal operator og x;1,...,x;mê|R'|

(c) R' êSMod*;(J;0)(Ç,L).

**Bevis:** (a) bevises ved et enkelt induksjonsbevis på lengden av velformede uttrykk. Det eneste man trenger å se litt nøyere på er induksjonstrinnet for en streng intensjonal operator T;<m,n>. Vi har:

R'(T;<m,n>(t;1,...,t;n,F) = 1 <–>
g(R')(F)ê$f$;<m,n>(R')(R'(t;1),...,R'(t;n)) & R'(F)=1

I lys av (+) og induksjonshypotesen holder høyre side her hvis og bare hvis:

g(R)(F)ê$f$;<m,n>(R)(R(t;1),...,R(t;n)) & R(F)=1

Dette holder i sin tur hvis og bare hvis R(T;<m,n>(t;1,...,t;n,F))=1.

Når det gjelder punkt (b) er dette en umiddelbar konsekvens av punkt (a).
Det gjenstår å gi et bevis for punkt (c):

Vi må vise at T(Ç,R'). Anta aêÇ. Da har man at:

a=<[<m,q(1)>,....,<m,q(n+1)>], F*,¥,r> for noen m,nêN og der komponentene er som

beskrevet tidligere. Vi må vise at Sat(<x;1,...,x;m>,a,R') om <x;1,...,x;m>ê|R'|^m. Vi sondrer mellom tre tilfelle ettersom r=0,1,2.

Tilfelle (i): r=0. Da har ¥ karakteristikk <n,m>. Anta

(1) <x;1,...,x;m>ê|R'|^m = |R|^m og at

(2) <F;1,...,f;n, f(R')(x;1),...,f(R')(x;m)>êCB;<n,m>(£(R'))ΩDom(¥)

Anta videre at

(3) F;kê*ƒ*;<m,q(k)>(R')(x;1,...,x;m) = *ƒ*;<m,q(k)>(R)(x;1,...,x;m)ΩTr;L(R)

for de k der F*(k)=1 og der <m,q(k)> er indeksen til en streng intensjonal operator. Vi antar:

(4) F;kê*ƒ*;<m,q(k)>(R')(x;1,...,x;m) = *ƒ*;<m,q(k)>(R)(x;1,...,x;m)

for de k der F*(k)=1 og der <m,q(k)> er indeksen til en svak intensjonal operator.
Siden ¥ er regulær (Jmf. definisjonen av et indekssystem i Kapittel V) må det finnes formler H;1,...,H;n og navn i;1,....,i;m slik at:

(5) g(R)(H;i)=F;i for i=1,..,n og g(i;k) = f(R)(x;k) for k=1,...,m

og dessuten slik at:

(6) <H;1,...,H;n,i;1,...,i;m>êCB;<n,m>(L(R))ΩDom(¥)

der:

(7) ¥(F;1,...,F;n, f(R')(x;1),...,f(R')(x;m)) = g(R)(¥(H;1,...,H;n,i;1,...,i;m))

Siden Ç er tillatt med hensyn på J har man at formelen:

(8) T;<m,q(1)>(i;1,...,i;m,H;1) &...& T;<m,q(n)>(i;1,...,i;m,H;n).–>
T;<m,q(n+1)>(i;1,...,i;m,¥(H;1,...,H;n,i;1,...,i;m))

er sann i R. Vi forutsetter i (8) at den k'te konjunkten i antesedenten er utelatt om F*(k)=0. Merk at i;1,...,i;m er navnene på henholdsvis x;1,...,x;m. Fra (3) og (5) følger:

(9) g(R)(H;k)ê*ƒ*;<m,q(k)>(R)(x;1,...,x;m) & R(H;k)=1 om F*(k)=1 og <m,q(k)> er indeksen til en streng intensjonal operator og at:

(10) g(R)(H;k)ê*ƒ*;<m,q(k)>(R)(x;1,...,x;m) om F*(k)=1 og <m,q(k)> er indeksen til en svak intensjonal operator.

Siden (8) er sann i R har vi i lys av (9) og (10) at

(11) g(R)(¥(H;1,...,H;n,i;1,...,i;m))ê*ƒ*;<m,q(n+1)>(R)(x;1,...,x;n) om <m,q(n+1)> er indeksen til en svak intensjonal operator og dessuten at:

(12) R(¥(H;1,...,H;n,i;1,...,i;m))=1 om <m,q(n+1)> er indeksen til en streng intensjonal operator.

Fra (7), (11) og (12) har vi i lys av definisjonen av "Tr;L(R)" og "*ƒ*;<m,q(n+1)>(R')" at :

¥(F;1,...,F;n, f(R')(x;1),...,f(R')(x;m))ê*ƒ*;<m,q(n+1)>(R')(x;1,...,x;m) som er det vi ønsker. De to andre tilfellene der r=1,2 bevises omtent likedan og overlates til leseren. Dette avslutter beviset for satsen. **Q.E.D.**

## §3 Isomorfi mellom modeller.

Anta R,R'êSMod;(J;0)(L) der LêJ. En isomorfi mellom R og R' er en en-entydig funksjon X som avbilder |R| på |R'| og som er slik at den oppfyller de følgende krav:

(i) Er x;1,...,x;nê|R| så gjelder:
X(R(f)(x;1,...,x;n)) = R'(f)(X(x;1),..., X(x;n)) om f er et n-ært funksjonssymbol i L (n≥1)

(ii) Er x;1,...,x;nê|R| så gjelder:
<x;1,...,x;n>êR(P) <–> <X(x;1),..., X(x;n)>êR'(P) om P er et n-ært predikat i L. (n≥1)

(iii) X(*(R)) = *(R')

(iv) X(R(t)) = R'(t) om t er en singulær term i snever forstand i L.

(v) X(R(e)) = R'(e) om e er en konstant i L.
(vi) Med X(F) der FêFml(£(R)) forstår vi resultatet av å erstatte enhver konstant e i F med konstanten f(R')(X(f(R);-1(e))) i £(R'). Vi må kreve for alle FêCFml(£(R)) og alle x;1,...,x;mê|R| at:

Fê*f*;<m,n>(R)(x;1,...,x;m) <–>
F(X)ê*f*;<m,n>(R')(X(x;1),...,X(x;m))

Dermed har vi gitt en fullstendig definisjon av hva som menes med at X er en isomorfi mellom R og R'. R og R' sies å være isomorfe om det finnes en isomorfi X mellom R og R'. Det er klart at isomorfi-relasjonen er en ekvivalensrelasjon.

**Lemma 3.0** Anta R,R'êSMod;(J;0)(L) der LêJ og at X er en isomorfi mellom R og R'. La F være en lukket formel i L(R). Med F`X forstår vi resultatet av å erstatte ethvert navn i i F med navnet på det tilsvarende individ i R'. t`X der têCTerm(L(R) defineres på tilsvarende måte. Har man nå at FêCFml(L(R)) og têCTerm(L(R)) gjelder:

R(F) = R'(F`X) og R(t) = R(t`X)

**Bevis:** Beviset er et enkelt induksjonsbevis på lengden av velformede uttrykk. Før man beviser satsen kan det først være hensiktsmessig å bevise at

X(g(R)(F)) = g(R')(F`X) og at X(g(R)(t)) = g(R')(t`X).

Vi minner i denne forbindelse om at g(R)(F) der FêCFml(L(R)) er en lukket formel i £(R), dvs. språket i modellstrukturen til R. Er H en eller annen formel der HêCFml(£(R)) er X(H) resultatet av å erstatte enhver konstant e i F med konstanten f(R')(X(f(R);-1(e))) i £(R'). Vi forutsetter selvfølgelig at X er en isomorfi mellom R og R'. Tilsvarende er X(t) når t er en lukket term i £(R) resultatet av å erstatte enhver konstant e som forekommer i t med konstanten f(R')(X(f(R);-1(e))) i £(R').

Vi overlater den detaljerte verifikasjon av satsen til leseren siden det dreier seg om et rent rutinebevis. **Q.E.D.**

**Lemma 3.1** Anta R,R'êSMod,(J;0)(L) og videre at RêSMod;(J;0)(Ç,L). Anta R er isomorf med R'. Da gjelder R'êSMod;(J;0)(Ç,L).

Vi utelater beviset for denne satsen siden innholdet i den er opplagt og fordi beviset blir svært langt om det skal gjennomføres detaljert. Det bør dog bemerkes at satsen holder fordi de syntaktiske operasjonene i systemkarakteristikken Ç er substitusjonsinvariante.

La R,BêSMod;(J;0)(L). Vi sier da at R er *korrekt inneholdt i* B hvis og bare hvis

(i) |R| Inkl |B|
(ii) £(B) er en utvidelse av £(R) med utelukkende nye konstanter.
(iii) For alle xê|R| har f(R)(x) = f(B)(x).

Gitt denne definisjonen holder følgende lemma:

**Lemma 3.2** Anta R,BêSMod;(J;0)(L), der LêJ, og at |R| Inkl |B|. Da finnes en B'êSMod; (J;0)(L) som er isomorf med B og der R er korrekt inneholdt i B'.

**Bevis:** Definer modellen B' på følgende måte: (a) Er aê|R[ setter man f(B')(a)=f(R)(a). Velg ut en mengde med konstanter C som ikke forekommer i £(R) og som er likemektig med |B|–|R|. La p være en korrelasjon mellom

|B|–|R| og C. Er xê|B|–|R| lar vi f(B') = p(x). (b) Vi setter *(B')= *(R). (c) Vi lar £(B') være £(R) utvidet med konstantene i C. (d) Vi setter ∏(B')(u)= ∏(R)(u) om u enten er en konstant, en singulær term i snever forstand, et predikat eller funksjonssymbol i L.

Definer en en-entydig funksjon Q med Const(£(B)) som domene og Const(£(B')) som verdiområde ved å sette Q(e)= f(B')(f(B);-1(e)) om eêConst(£(B))
(e) Vi setter $f$;<m,n>(B')(x;1,..,x;m)= Mg(Q(F): Fê$f$;<m,n>(B)(x;1,...,x;m)) om x;1,...,x;mê|B'|=|B|. Vi bemerker at dersom FêCFml(£(B)) er Q(F) den formelen vi får når vi erstatter hver konstant e som forekommer i F med Q(e). Dermed er modellen B' fullstendig definert i det vi bemerker at |B'| selvfølgelig settes lik |B|. Det er nå lett å se at identitetsavbildningen av |B| på |B'| er en isomorfi mellom B og B' og at R er korrekt inneholdt i B'. **Q.E.D.**

## §4 Δ-ekstensjon, Δ-substruktur, elementær substruktur, elementær ekstensjon.

Anta Δ Inkl Fml(L) og at RêSMod;(J;0)(L). Δ(R) er mengden av R-instanser av formler i Δ. Er Δ mengden av alle formler i L er Δ(R) mengden av alle lukkede formler i L(R).

Anta R,BêSMod;(J;0)(L) og at R er korrekt inneholdt i B. La Δ Inkl Fml(L). Da er B en Δ-*ekstensjon av* R hvis og bare hvis man har for enhver formel FêΔ(R) at B(F)=1 dersom R(F)=1, mao. hvis og bare hvis man har:

(AF)(FêΔ(R) & R(F)=1 –> B(F)=1).

Er Δ lukket under negasjon, dvs. har man (AF)(FêΔ –> (¬F)êΔ), er Δ(R) også lukket under negasjon. Det følger derfor i dette tilfellet at dersom B er en Δ-ekstensjon av R så har man R(F)=B(F) for de F som er med i Δ. For er da FêΔ og har man R(F)=0 følger det at R(¬F)=1 og da, siden (¬F)êΔ, at B(¬F)=1. Følgelig B(F)=0.

Vi sier at R *er en* Δ-*substruktur av* B hvis og bare hvis B er Δ-ekstensjon av R. Er Δ alle formlene i L kaller vi en Δ-substruktur for en *elementær substruktur* og en Δ-ekstensjon for en *elementær ekstensjon*. Er R,BêSMod;(J;0)(L) kaller vi dem for *elementært ekvivalente* hvis og bare hvis R(F)=B(F) for alle FêCFml(L).
Er R en elementær substruktur av B har vi åpenbart R(F)=B(F) for alle FêCFml(L) og følgelig at R og B er elementært ekvivalente.

Er R en Δ-substruktur av B og Δ' Inkl Δ så er R en Δ'-substruktur av B. Er Δ Inkl Fml(L') for noe L'êJ der L er en utvidelse av L har man at R|L' er en Δ-substruktur av B|L'. (Jmf. Lemma 1.1) Merk at om |R| Inkl |B| bruker vi de samme navnene på individene i |R| i både modellen R og modellen B.

**Lemma 4.1** Anta R,BêSMod;(J;0)(L), at (x=c)êΔ Inkl Fml(L) og at R er en Δ-substruktur av B. Da har vi B(e) = R(c).

**Bevis:** Er i navnet på R(c) har man (i=c)êΔ(R). Dessuten har man R(i=c)=1. Siden R er en Δ-substruktur av B følger da B(i=c)=1. Fra dette har man B(c)=B(i)=R(i) = R(c). **Q.E.D.**

La R,BêSMod;(J;0)(L). Anta R er korrekt inneholdt i B. Vi utvider B til en struktur for L(R), B;R, slik: Er i et navn på aê|R| setter man ∏;(B;R)(i)=a, ellers lar man B;R være som B. Man ser at B;R êSMod;(J;0)(L(R)). Er L'=L(R), språket til B;R tjener et navn i i i L' to formål: Det er et navn i L(B;R) og en konstant i L'. Vi hevder at dette ikke gjør noe fra eller til vedrørende sannhetsverdien til B;R(F). For å innse det kan man se på i, der i er et slikt navn, som en konstant i L(R) og bruke i' for det korresponderende individ i B;R som i er navn på. Da er i' et navn på B;R(i), og hvis F' resulterer fra F ved å erstatte i overalt med i' har man at B;R(F)=BR(F') i følge Lemma 2.1 i §2, Kapittel III.

La Δ Inkl Fml(L) og RêSMod;(J;0)(L). Δ-*diagrammet* til R, Diag(Δ,R), er J;0-teorien

hvis språk er L(R) og hvis ikke-logiske aksiomer er alle de FêΔ(R) der R(F)=T.

Er RêSMod;(J;0)(Ç,L) er Δ-diagrammet til R, Diag(Δ,R), den J;0[Ç]-teorien i L(R) der de ikke-logiske aksiomene er de FêΔ(R) der R(F)=1.

**Lemma 4.2** (Diagram-lemma) La Δ Inkl Fml(L). Anta R,BêSMod;(J;0)(Ç,L) og at R er korrekt inneholdt i B. Da er R en Δ-substruktur for B hvis og bare hvis man har at B;R er en modell for Diag(Δ,R).

**Bevis:** Er FêCFml(L(R)) har man B;R(F) = B(F) siden B;R er en utvidelse av B. Setningen følger så fra definisjonen av Δ-substruktur og Δ-diagram. **Q.E.D.**

Er Δ Inkl Fml(L) kalles Δ for *regulær* hvis og bare hvis alle formler av typen x=y og x≠y er med i Δ og F;(y;1,...,y;n)[x;1,...,x;n] er med i Δ om FêΔ for alle FêFml(L).

Det følgende teorem er viktig:

**Teorem 4.3** (Keislers modellekstensjonsteorem) Anta RêSMod;(J;0)(Ç,L) der LêJ. Ata T er en J;0[Ç]-teori med språk L og at Δ er en regulær formelmengde som er inkludert i Fml(L). Da har R en Δ-ekstensjon som er en modell for T hvis og bare hvis ethvert teorem i T som er en disjunksjon av negasjoner av formler i Δ er gyldig i R.

**Bevis:** (a) Anta en slik Δ-ekstensjon B av R finnes. Vi må vise at hvis T :– (¬F;1v...,v¬F;n) der F;iêΔ (i=1,...,n) så er (¬F;1v...,v¬F;n) gyldig i R. Hvis dette imidlertid ikke er tilfelle finnes det en R-instans (¬F';1v.... v¬F';n) av (¬F;1v...,v¬F;n) slik at R(F';i)=1 for i=1,...,n. Siden B er en Δ-ekstensjon av R og F';iêΔ må man ha B(F';i)=1 for i=1,...,n. Da følger B(¬F';1v.... v¬F';n)=0. Siden (¬F';1v.... v¬F';n) er en B-instans av et teorem i T og B er en modell for T er dette umulig.

(b) Anta betingelsen holder, ie. at ethvert teorem i T som er en disjunksjon av negasjoner av formler i Δ er gyldig i R. Vi danner T' fra T ved å legge til alle navnene i L(R) som nye konstanter. Vi danner T" fra T' ved å legge alle de ikke-logiske aksiomene i Diag(Δ,R) som nye aksiomer. Vi skal vise at T" er konsistent. Hvis dette ikke er tilfelle har man ved hjelp av reduksjonsteoremet for konsistens at T :– (¬F';1v...v¬F';n) der F';iêΔ(R) og R(F';i)=1 for i=1,...,n. I lys av konstant-teoremet har man da T:– (¬F;1v...v¬F;n) hvor hver F;i er resultatet av å erstatte navnene i F';i med nye variabler. Siden Δ er regulær har man at F;iêΔ (i=1,...,n). Etter forutsetningen er da (¬F;1v...v¬F;n) gyldig i R; noe som imliserer at R( (¬F';1v...v¬F';n) =T og derfor R(F';i)=0 for noe iê{1,...,n}. Dette gir oss en motsigelse.

Etter fullstendighetsteoremet for J;0[Ç] må T" ha en modell B'êSMod;(J;0)(Ç,L). Er i,j navn på distinkte individer i R så er (i≠j) en formel i Δ(R) og R(i≠j)=T. Da er (i≠j) et aksiom i Diag(Δ,R) og følgelig må man ha at B'(i≠j)=T, dvs. at B'(i)≠B'(j). Dette innebærer at vi kan erstatte B' med en isomorf modell B der R er korrekt inneholdt i B og der B(i) er det individet i R hvis navn er i. Videre har vi at dersom B;0 er restriksjonen av B til L så er B;0;(R) = B. Siden B er isomorf med B' er BêSMod;(J;0)(Ç,L(R)) og dessuten en modell for T". Da må den være en modell for Diag(Δ,R). Ifølge Diagram-lemmaet er B;0 en Δ-ekstensjon av R. Videre er B;0 en modell for T i lys av Lemma 1.1. Det er også klart , siden B;0 er restriksjonen av B til L og BêSMod;(J;0)(Ç,L(R)) at B;0êSMod;(J;0)(Ç,L). **Q.E.D.**

**Korollar 4.4** La ∑ være en regulær mengde med formler i L og la Δ være en mengde med formler som inneholder enhver formel (AX;1)...(Ax;n)F der F er en disjunksjon av negasjoner av formler i ∑. Er R,BêSMod;(J;0)(Ç,L) og B en Δ-ekstensjon av R så finnes det en CêSMod;(J;0)(Ç,L) som er en ∑-ekstensjon av B og en

elementær ekstensjon av R.

**Bevis:** La ∑' være mengden av formler F;(x;1,...,x;n)[i;1,...,i;k] hvor Fê∑ og i;1,...,i;k er navn i L(R). Vi skal vise at det finnes en ∑'-ekstensjon av B;R om er en modell for Diag;e(R) der "Diag;e(R)" står for Diag(Δ,R) når Δ=Fml(L). I lys av modellekstensjonsteoremet behøver vi bare vise at hvis F;1,...,F;nê∑' og (¬F;1v...v¬F;n) er et teorem i Diag;e(R) så er (¬F;1v...,¬F;n) gyldig i B;R. Lukningen G av (¬F;1v...v¬F;n) er et teorem i Diag;e(R), og siden vi i lys av diagramlemmaet har at R;R er en modell for Diag;e(R) må man ha at R(G) = R;R(G) = 1. Siden GêΔ(R) er den et aksiom i Diag(Δ,R) og etter hypotese og Diagramlemmaet har man derfor B;R(G)=1. Det følger at (¬F;1v...v¬F;n) er gyldig i B;R.

La C'êSMod;(J;0)(Ç,L(R)) være en ∑'-ekstensjon av B;R som er en modell for Diag;e(R). La C= C'|L. Siden ∑ Inkl ∑' er C en ∑-ekstensjon av B. Er i navnet på aê|R| har vi etter Lemma 4.1 at C'(i) = B;R(i) = a. Dette impliserer C'= C;R. Etter Diagram-lemmaet er da C en elementær ekstensjon av R. **Q.E.D.**

## §5 Elementære kjeder og unionen av en elementær kjede. Tarski's lemma.

Vi gir først et bevis for den følgende sats:

**Lemma 5.1** Anta R,BêSMod;(J;0)(Ç,L) der LêJ. Anta B er en elementær ekstensjon av R. Da gjelder:

(a) g(R)(F) = g(B)(F) om FêCFml(L(R))

(b) Er FêCFml(£(R)) og x;1,...,x;nê|R| gjelder:

Fê*f*;<m,n>(R)(x;1,...,x;n) <–> Fê*f*;<m,n>(B)(x;1,...,x;n)

**Bevis:** For å vise (a) er det åpenbart tilstrekkelig å vise at g(R)(e) = g(B)(e) om eêConst(L) eller e er et navn i L(R). Siden (x=e)êFml(L) og B er en elementær ekstensjon av R har vi i følge Lemma 4.1 at (0) R(e)=B(e)ê|R|. Vi må dessuten per definisjon av "elementær ekstensjon" ha at R er korrekt inneholdt i B. Herav følger f(R) Inkl f(B) og derfor i lys av (0) f(R)(R(e)) = f(B)(B(e)). Fra dette og definisjonen av g(R), g(B) følger g(R)(e) = g(B)(e). Anta i er et navn i L(R). Da har man, siden f(R) Inkl f(B), at g(R)(i) = f(R)(x) = f(B)(x) = g(B)(i) om x er det objektet i |R| som i er navn på.

For å vise at (b) holder anta at FêCFml(£(R)). Da finnes det en formel F'êCFml(L(R)) slik at (1) g(R)(F')=F. I lys av (a) har man da at
(2) g(R)(F')=g(B)(F'). La a;1,...,a;n være vilkårlige elementer i |R| og i;1,...,i;n de korresponderende navnene i L(R). Siden B er en elementær ekstensjon av R har man at:

R(T;<m,n>(i;1,...,i;n,F')) = B(T;<m,n>(i;1,...,i;n,F')). Dette impliserer:

g(R)(F')ê*f*;<m,n>(R)(a;1,...,a;n) <–> g(B)(F')ê*f*;<m,n>(B)(a;1,...,a;n).

I lys av (1) og (2) innebærer dette:

Fê*f*;<m,n>(R)(a;1,...,a;n) <–> Fê*f*;<m,n>(B)(a;1,...,a;n) **Q.E.D.**

La R;1,R;2,....,R;n,... være en sekvens av J;0-modeller for L. Den sies å være en *elementær kjede* hvis og bare hvis R;(n+1) er en elementær ekstensjon av R;n for alle n≥1.

La nå R;1,R;2,....,R;n,... være en elementær kjede. Vi skal definere en modell R som skal kalles *unionen av kjeden*. Dette skjer ved de følgende stipulasjoner:

(i) Vi setter |R| = UN/n,1,∞/(|R;n|)

(ii) Siden R;(n+1) er en elementær ekstensjon av R;n har vi at R;n er korrekt inneholdt i R;(n+1). Mer generelt har man at R;n er en

elementær ekstensjon av R;1 og derfor at R;1 er korrekt inneholdt i R;n (n≥1). Vi setter derfor £(R) = UN/n,1,∞/(£(R;n)). Dermed er språket i modellstrukturen til R definert.

(iii) Er R;1,R;2,....,R;n,... en elementær kjede skal vi anta at vi har ordnet det slik at *(R;(n+1)) = *(R;n) for alle n≥1. Dette er opplagt mulig. Vi lar derfor *(R) være *(R;1). Da vil ¬(*(R)ê|R|) for i motsatt fall ville man ha

*(R;1)= *(R;m)ê|R;m| for noe m. Men det er umulig.

(iv) La x;1,...,x;mê|R|. Da finnes det et minste tall n;0 slik at x;1,...,x;mê|R;(n;0)|. Vi setter da:
*f*;<m,n>(R)(x;1,...,x;m) = UN/k≥n;0/(*f*;<m,n>(R;k)(x;1,...,x;m))

(v) Vi må definere L-morfien g(R) i unionen R. Denne er fiksert straks den er fiksert for konstantene, de singulære termene i snever forstand, funksjonssymbolene og predikatene i L. Vi setter derfor g(R)(u) = g(R;1)(u) om u er en konstant, en singulær term i snever forstand, et funksjonssymbol eller et predikat i L. Vi gjør oppmerksom på at siden hver modell i sekvensen R;1,...,R;n,... er en elementær ekstensjon av den foregående har man at |R;j| Inkl |R;m| om j≤m. Av denne grunn er navnene i L(R;j) en delmengde av dem i L(R;m), og er i et navn på aê|R;j| så vil også i være et navn på a i L(R;m).

(vi) Vi må definere ∏;R.

(a) Vi setter ∏;R(e) = ∏;(R;1)(e) om e er en konstant i L. Dette er veldefinert i lys av Lemma 4.1.

(b) Er t en singulær term og har man ∏;(R;1)(t)ê|R;1| setter vi ∏;(R;1)(t)= ∏;(R;1)(t). Ellers lar vi ∏;(R) =*(R). Dette er veldefinert fordi vi har at ∏;(R;(n+1))(t) =∏;(R;n)(t) om ∏;(R;n)(t)ê|R;n| for alle n≥1 siden R;(n+1) er en elementær ekstensjon av R;n.

(c) Er x;1,...,x;mê|R| finnes k≥1 slik at x;1,...,x;nê|R;k|. Vi setter da:

∏;R(f)(x;1,...,x;m) = ∏;(R;k)(f)(x;1,...,x;m) og
<x;1,...,x;m>ê∏;R(P) <–> <x;1,...,x;m>ê∏;(R;k)(P)

om f og P henholdsvis er et m-ært funksjonssymbol og predikat i L (m≥1). Dette er også veldefinert siden R;(n+1) er en elementær ekstensjon av R;n for alle n≥1.

Dermed har vi gitt en fullstendig definisjon av hva som menes med unionen av en elementær kjede.

**Lemma 5.2** La R;1, R;2,..... være en elementær kjede der man har R;nêSMod;(J;0)(Ç,L) for alle n≥1. Da har man at RêSMod;(J;0)(Ç,L) der R er unionen av kjeden R;1, R;2,.....

**Bevis:** Siden R åpenbart må være en J;0-modell er det nok å vise at T(Ç,R). Anta aêÇ. Da er a = <[<m,q(1)>,...,<m,q(n+1)>],F*,¥,r> for noen naturlige tall m,n der komponentene ,F*, ¥ og r er som beskrevet tidligere.

Tilfelle (i): r=0. Da har ¥ karakteristikk <n,m>. Anta x;1,...,x;nê|R| og at

(1) <F;1,...,F;n, f(R)(x;1),..,f(R)(x;m)>êCB;<n,m>(£(R))ΩDom(¥) og dessuten at

(2) F;kê*f*;<m,q(k)>(R)(x;1,...,x;m) for de k der F*(k)=1. Fra (1) og definisjonen av R følger det at det må finnes j≥1 slik at

(2.1) F;1,...,F;nêCFm(£(R;j)) & x;1,...,x;mê|R;j| &
f(R)(x;1),....,f(R)(x;m)êConst(£(R;j))

Fra (2) har man per definisjon:

(3) F;kêUN/v≥c;0/(*f*;<m,q(k)>(R;v)(x;1,...,x;m)) om F*(k)=1

der c;0 er det minste naturlige tallet slik at x;1,...,x;mê|R;(c;0)|. Det er klart at j≥c;0. Fr (3) følger derfor i lys av Lemma 5.1 at

(4) F;kê*f*;<m,q(k)>(R;j)(x;1,...,x;m) om F*(k)=1

Fra (2.1) og (1) følger

<F;1,,...,F;n, f(R;j)(x;1),..,f(R;j)(x;m)>êCB;<n,m>(£(R;j))ΩDom(¥)

Dette, (4) samt det faktum at R;j er slik at T(Ç,R;j) impliserer at:

¥(F;1,...,F;n, f(R)(x;1),..,f(R)(x;m))ê(*f*;<m,q(n+1)>(R;j)(x;1,...,x;m))
Inkl *f*;<m,q(n+1)>(R)(x;1,...,x;m) som er det vi ønsker.

Tilfelle (ii): r=1. Da har ¥ karakteristikk <n,p> for noe p. Anta

(5) <F;1,...,F;n,c;1,..,c;p>êCB;<n,p>(£(R))ΩDom(¥) og dessuten at

(6) F;kê*f*;<m,q(k)>(R)(x;1,...,x;m) for de k der F*(k)=1.

Vi antar her selvfølgelig at (7) x;1,...,x;mê|R|. I lys av (5) har man at det finnes j≥1 slik at

(8) F;1,...,F;nêCFm(£(R;j)) & c;1,....,c;pêConst(£(R;j))

La c;0 være det minste naturlige tallet slik at x;1,...,x;mê|R;(c;0)|. Da har man per definisjon fra (6) at:

(9) F;kêUN/v≥c;0/(*f*;<m,q(k)>(R;v)(x;1,...,x;m)) om F*(k)=1

Vi kan åpenbart velge j≥c;0. Da har man ved hjelp av Lemma 5.1:

(10) F;kê*f*;<m,q(k)>(R;j)(x;1,...,x;m) <–> F;kê *f*;<m,q(k)>(R;v)(x;1,...,x;m)

for alle v≥j≥c;0. Fra (9) har man:

(11) F;kê*f*;<m,q(k)>(R;s)(x;1,...,x;m) for noe s≥c;0.

Er s≤j har man ved hjelp av Lemma 5.1 at

(12) F;kê*f*;<m,q(k)>(R;j)(x;1,...,x;m) og er s≥j har man fra (11) og (10) at (12) holder. (F*(k)=1)

Siden R;j er slik at T(Ç,R;j) har man i lys av definisjonen av "T(Ç,R;j)" at:

¥(F;1,...,F;n,c;1,...,c;p)ê(*f*;<m,q(n+1)>(R;j)(x;1,...,x;m))
Inkl *f*;<m,q(n+1)>(R)(x;1,...,x;m) som er det vi ønsker.

Tilfelle (iii): Da har ¥ karakteristikk <n,0>. Anta:

(13) <F;1,...,F;n>êCB;<n,0>(£(R))ΩDom(¥) og dessuten at

(14) F;kê*f*;<m,q(k)>(R)(x;1,...,x;m) for de k der F*(k)=1.

Vi antar her at (15) x;1,...,x;mê|R|.

Vi har fra (13) at

(15) F;1,...,F;nêCFml(£(R;j)) for noe j≥1. La c;0 være det minste naturlige tallet slik at x;1,...,x;mê|R;(c;0)|. Da har man per definisjon fra (6) at:

(16) F;kêUN/v≥c;0/(*f*;<m,q(k)>(R;v)(x;1,...,x;m)) om F*(k)=1

Vi kan anta at j≥c;0. Fra (16) og Lemma 5.1 følger da:

(17) F;kê*f*;<m,q(k)>(R;j)(x;1,...,x;m) for k der F*(k)=1. Dette og (15) impliserer siden R;j tilfredstiller Ç at:

(18) ¬((¬¥(F;1,...,F;n))ê*f*;<m,q(n+1)>(R;j)(x;1,...,x;m))

Vi må dessuten ha at (¬¥(F;1,...,F;n))êCFml(£(R;j)). Dette og (18) impliserer at:

(19) ¬((¬¥(F;1,...,F;n))ê*f*;<m,q(n+1)>(R)(x;1,...,x;m))

For anta det motsatte: Da (¬¥(F;1,...,F;n))ê*f*;<m,q(n+1)>(R)(x;1,...,x;m). Da har man at (¬¥(F;1,...,F;n))ê*f*;<m,q(n+1)>(R;p)(x;1,...,x;m) for noe p≥c;0. (a) Er p≤j har man (¬¥(F;1,...,F;n))êCFml(£(R;p)). Man kan da ved hjelp av Lemma 5.1 slutte at (18) er gal. Men det er umulig. (b) p≥j. Da har man igjen ved hjelp av Lemma 5.1 og det at (¬¥(F;1,...,F;n))êCFml(£(R;j)) at (18) er gal. Men det er umulig. Dette viser at (19) holder.

Det gjenstår å vise at F;<m,n>(R)(x;1,...,x;n) Inkl Tr;L(R) om x;1,...,x;mê|R| og

<m,n> er indeksen til en streng intensjonal operator.

For å bevise dette trenger vi det følgende lemma:

**Lemma 5.3** (Tarskis Lemma) La R;1, R;2,..... være en elementær kjede der R;nêSMod; (J;0)(Ç,L) for n=1,2,.... La R være unionen av kjeden R;1, R;2,.... .Da er R en elementær ekstensjon av R;n for ethvert n≥1.

**Bevis:** Det er tilstrekkelig å bevise at (1) R(F)=R;n(F) og R(t) =R;n(t) om FêCFml(L(R;n)) og têCTerm(L(R;n)). Dette gjøres ved induksjon på lengden av velformede uttrykk.

(i) Er t en konstant eller en singulær term i snever forstand har man at R(t) = R;n(t) etter definisjonen av R.

(ii) Anta t=f(t;1,...,t;q) der f er et q-ært funksjonssymbol.
*Tilfelle (a):* R;n(f(t;1,...,t;q)) =*(R). Da har man at R;n(t;j)=*(R) for noe jê{1,...,q}. I lys av induksjonshypotesen har man da R;n(t;j) = R(t;j) og derfor at R(t;j)=*(R) for noe j der 1≤j≤q. Det følger at R(f(t;1,...,t;q)) =*(R) = R;n(f(t;1,...,t;q)).
*Tilfelle (b):* Anta (0) R;n(f(t;1,...,t;q))≠*(R). Da har man :

(1) R;n(f(t;1,...,t;q)) = R;n(f)(R;n(t;1),...,R,n(t;q)). Etter induksjons-hypotesen har man:

(2) R;n(t;j) = R(t;j) for j=1,...,q. Dessuten har man fra (0) at R;n(t;j)ê|R;n|. Etter definisjonen av R har man da:

R(t) = R(f)(R(t;1),...,R(t;q))
= R;n(f)(R;n(t;1),...,R;n(t;q))
= R;n(f(t;1,...,t;q)) = R;n(t).

(iii) Anta t= (ix)F.
*Tilfelle (a):* Anta det finnes et og bare et navn i i L(R;n) slik at:

(1) R;n(F;x[i]) = 1. Da har man:

(2) R;n((Ax)(F <–> x=i)) =1 og derfor:

(3) R;m((Ax)(F <–> x=i)) =1 for alle m≥n siden R;m er en elementær ekstensjon av R;n om m≥n. Ved hjelp av (1) og induksjonshypotesen har man:

(4) R(F;x[i]) =1

Anta nå at det fantes to distinkte navn i;1,i;2 i L(R) slik at

(5) R(F;x[i;1]) =1 & R(F;x[i;2]) =1. Da er i;1,i;2 navn i L(R;m) for noe m≥n. Fra (5) og induksjonshypotesen har man

(6) R;m(F;x[i;1]) =1 & R;m(F;x[i;2]) =1. Siden i;1 og i;2 er distinkte har man:

(7) R;m(i;1≠i;2)= 1. Men (6) og (7) strider mot (3). Følgelig har man at i er det eneste navnet der (4) holder. Er aê|R| det individet som i er navn på følger det at R;n((ix)F) = a = R((ix)F).
*Tilfelle (b):* R;n(F;x[i]) =0 for alle navn i i L(R;n). La i være et vilkårlig navn i L(R). Da er i et navn i L(R;m) for noe m≥1. Vi kan anta at m≥n. Da har man siden, R;n((Ex)F)=0, at R;m((Ex)F)=0 siden R;m er en elementær ekstensjon av R;n om m≥n. Det følger at R;m(F;x[i])=0 og derfor etter induksjonshypotesen at R(F;x[i])=0. Siden i var et vilkårlig navn i L(R) har man R((Ex)F) =0. Men da følger R((ix)F) = *(R) = R;n((ix)F).
*Tilfelle (c):* Anta det finnes distinkte navn i;1,i;2 i L(R;n) slik at
R;n(F;x[i;1]) = R;n(F;x[i;2]) = 1. Da (1) R;n((ix)F) = *(R). Etter induksjonshypotesen har man R(F;x[i;1]) = R(F;x[i;2]) = 1. Dette innebærer at R((ix)F) = *(R) som sammen med (1) gir oss det vi ønsker.

(iv) Anta F = P(t;1,...,t;q) for q≥1. Da har man at R;n(P(t;1,...,t;q)) = 1 hvis og bare hvis (1) <R;n(t;1),...,R;n(t;q)>êR;n(P). Etter induksjonshypotesen har man R;n(t;j)=R(t;j) for j=1,...,q. Følgelig holder (1) hvis og bare hvis:

(2) <R(t;1),...,R(t;q)>êR;n(P). Etter definisjonen av R holder (2) hvis og bare hvis <R(t;1),...,R(t;q)>êR(P). Dette er ekvivalent med R(P)(R(t;1),...,R(t;q))=1.

(v) Induksjonstrinnene når F= (G–> H) og når F= (¬G) er nærmest trivielle og overlates til leseren.

(vi) Anta F= (Ax)G og anta R;n((Ax)G) =1. Anta for reduktio ad absurdum at R((Ax)G)=0. Da har vi at (1) R(G;x[i])=0 for noe navn i i L(R). Da er i et navn i L(R;k) for noe k≥1. Vi kan anta k≥n. Men vi må ha (2) R;k((Ax)G) =1 siden R;k er en elementær ekstensjon av R;n. Fra (1) og induksjonshypotesen har vi imidlertid R;k(G;x[i]) = 0. Dette strider mot (2) siden i er et navn i L(R;k). Anta på den annen side ar R((Ax)G)=1. Da har man at R(G;x[i])=1 for ethvert navn i i L(R). Da må man ha at R(G;x[i])=1 for ethvert navn i i L(R;n). I lys av induksjonshypotesen følger fra dette R;n(G;x[i])=1 for alle navn i i L(R;n). Men dette innebærer at R;n((Ax)G)= 1.

(vii) Anta F= T;<m,q>(t;1,...,t;m,H) og anta (1) R(T;<m,q>(t;1,...,t;m,H))=1. Man har at (1) holder hvis og bare hvis

(2) g(R)(H)ê*f*;<m,q>(R)(R(t;1),....R(t;m))

Etter induksjonshypotesen holder (2) hvis og bare hvis:

(3) g(R)(H)ê*f*;<m,q>(R)(R;n(t;1),....R;n(t;m))

La c;0 være det minste naturlige tall der R;n(t;1),...,R;n(t;m)ê|R;(c;0)|. Da holder (3) per definisjon hvis og bare hvis:

(4) g(R)(H)êUN/v≥c;0/(*f*;<m,q>(R;v)(R;n(t;1),....R;n(t;m)))

Siden FêCFml(L(R;n)) har man at HêCFml(L(R;n)). Man har derfor i lys av definisjonen av g(R) at g(R)(H) = g(R;n)(H)êCFml(£(R;n)). I lys av Lemma 5.1 har man derfor at (4) holder hvis og bare hvis:

(5) g(R;n)(H)ê*f*;<m,q>(R;n)(R;n(t;1),....R;n(t;m))

Dette er ekvivalent med at R;n(T;<m,q>(t;1,...,t;m,H))= 1.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for Lemma 5.3.

Det gjenstår bare å fullføre beviset for Lemma 5.2. Det eneste vi behøver å vise er at om x;1,...,x;mê|R|, og <m,n> er indeksen til en streng intensjonal operator, så gjelder:

*f*;<m,n>(R)(x;1,...,x;m) Inkl Tr;L(R).

Anta derfor at x;1,...,x;mê|R| og at Fê*f*;<m,n>(R)(x;1,...,x;m) i det forutsettes at <m,n> er indeksen til en streng intensjonal operator. La c;0 være det minste naturlige tall der x;1,...,x;mê|R;(c;0)|. Vi har da etter definisjonen av R at:

(1) FêUN/v≥c;0/(*f*;<m,n>(R;v)(x;1,...,x;m))

Nå har man at FêCFml(£(R)) og derfor at FêCFml(£(R;k)) for noe k. Man har at k≥c;0. Ved hjelp av Lemma 5.1 og (1) følger:

(2) Fê*f*;<m,n>(R;k)(x;1,...,x;m))

Nå har man *f*;<m,n>(R;k)(x;1,...,x;m)) Inkl Tr;L(R;k). Dette og (2) impliserer at det finnes H der man har:

(3) F=g(R;k)(H) & HêCFml(L(R;k)) & R;k(H)=1

Vi har at g(R;k)(H) = g(R)(H), og siden R er en elementær ekstensjon av R;k i lys av Lemma 5.3, følger ved hjelp av (3) at R(H)=1. Men da:

(4) F = g(R)(H) & HêCFml(L(R)) & R(H)=1. Dette innebærer at FêTr;L(R)

Dermed har vi også gitt et fullstendig bevis for Lemma 5.2. **Q.E.D.**

## §6 En viktig hjelpesetning.

**Lemma 6.1** Anta L;1,L;2êJ. La LêJ være det språket hvor de ikke-logiske symbolene er nøyaktig dem som er felles for L;1 og L;2. Anta R;1,R;2,.... er en elementær kjede der R;nêSMod;(J;0)(Ç,L;1) for ethvert n≥1. Anta R';1,R';2,.... er en elementær kjede der R';nêSMod;(J;0)(Ç,L;2) for alle n≥1. Anta videre at

R;1|L, R';1|L, R;2|L, R';2|L,.....

er en elementær kjede av modeller for L. La R være unionen av kjeden R;1, R;2,..... og la R' være unionen av kjeden R';1,R';2,..... Under disse omstendigheter har man:

R|L = R'|L

**Bevis:** Det vil være tilstrekkelig å gi bevis for de følgende påstander:

(a) |R| = |R'|
(b) Const(£(R)) = Const(£(R'))
(c) f(R) = f(R')
(d) £(R|L) = £(R'|L)
(e) f(R|L) = f(R'|L)
(f) $f$;<m,n>(R|L)(x;1,...,x;m) = $f$;<m,n>(R'|L)(x;1,...,x;m) for alle x;1,...,x;mê|R|L|= |R|
(g) ∏;(R|L)(u) = ∏;(R'|L)(u) om u enten er et funksjonssymbol, predikat, singulær term i snever forstand eller en konstant i L.

Ad (a): Anta xê|R|. Da er xê|R;n| for noe nêN. Da har man xê|R;n|L| = |R;n| og følgelig xê| R';n|L| siden R'|L er en elementær ekstensjon av R;n|L. Da er xê|R';n| og følgelig x êUN/n,1,∞/|R';n| = |R'|. Inklusjonen den andre veien bevises analogt.

Ad(b): Anta cêConst(£(R)). Da har man cêConst(£(R;n)) for noe n. Da: cêConst(£(R;n|L)). (Se i denne forbindelse definisjonen av R|L i §1). Siden R';n|L er en elementær ekstensjon av R;n|L må man følgelig ha at cêConst(£(R';n|L)) = Const(£(R';n)) Inkl Cont(£(R)). Inklusjonen den andre veien bevises likedan.

Ad (c): Man har at (1) f(R) = UN/n,1,∞/(f(R;n)) = UN/n,1,∞/(f(R;n|L)) siden f(R;n|L) = f(R;n) etter definisjonen av "R;n|L" Nå har man:

(2) f(R;n|L) Inkl f(R';n|L) = f/R';n) Inkl f(R') for alle n≥1 siden R';n|L er en elementær ekstensjon av R;n|L. Fra (1) og (2) følger f(R) Inkl f(R'). Inklusjonen den andre veien bevises helt analogt.

Ad (d): Man har at £(R|L) eer £(R) med mengden av funksjonssymboler, predikater og singulære termer i snever forstand begrenset til dem som forekommer i L. Man må ha at Const(£(R|L)) = Const(£(R)). Tilsvarende for £(R'|L). Siden Const(£(R')) = Const(£(R)) i følge det vi beviste under (b) må man ha at £(R|L) = £(R'|L).

Ad (e): Etter definisjonene av "R|L" og "R'|L" har man at f(R|L) = f(R) = f(R') = f(R'|L) om man tar i betraktning det som ble bevist under (c) ovenfor.

Ad (f): Anta x;1,...,x;mê|R| og anta:

(1) Fê$f$;<m,n>(R|L)(x;1,...,x;m). La c;0 være det minste naturlige tallet der man har x;1,...,x;m ê|R;(c;0)|. Da har man i lys av definisjonen av R:

(2) $f$;<m,n>(R)(x;1,...,x;m) = UN/v≥c;0/($f$;<m,n>(R;v)(x;1,...,x;m))

I lys av definisjonen av hva som menes med restriksjonen av en J;0-modell og (1) har man da:

(3) Fê$f$;<m,n>(R)(x;1,...,x;m)ΩCFml(£(R|L))
= UN/v≥c;0/($f$;<m,n>(R;v)(x;1,...,x;m)) Ω CFml(£(R|L))
= UN/v≥c;0/($f$;<m,n>(R;v)(x;1,...,x;m) Ω CFml(£(R|L)))
= UN/v≥c;0/($f$;<m,n>(R;v)(x;1,...,x;m) ΩCFml(£(R;v|L)))
= UN/v≥c;0/($f$;<m,n>(R;v|L)(x;1,...,x;m)

Man må derfor ha:

Fê$f$;<m,n>(R;j|L)(x;1,...,x;m) for noe j≥c;0

Siden R';j|L er en elementær ekstensjon av R;j|L ha vi i følge Lemma 5.1 at:

$f$;<m,n>(R;j|L)(x;1,...,x;m) Inkl $f$;<m,n>(R';j|L)(x;1,...,x;m) og derfor:

(4) Fê$f$;<m,n>(R';j|L)(x;1,...,x;m)

På samme måte som (3) kan man vise:

(5) Fê$f$;<m,n>(R'|L)(x;1,...,x;m) <–>
FêUN/v≥c;1/($f$;<m,n>(R';v|L)(x;1,...,x;m)

der c;1 er det minste naturlige tallet slik at x;1,...,x;mê|R';(c;1)|. Siden x;1,...,x;m ê|R;(c;0)| Inkl |R;j| må vi ha, siden R';j|L er en elementær ekstensjon av R;j|L, at x;1,...,x;m ê|R';j|. Det følger at j≥c;1. Fra (4) og (5) følger derfor:

Fê$f$;<m,n>(R'|L)(x;1,...,x;m)

Inklusjonen den andre veien bevises analogt.

Ad (g): Vi ser bare på det tilfellet der u er et n-ært predikat i L. Vi skal da vise:

∏;(R|L)(P) = ∏;(R'|L)(P) i det vi antar at u=P. Anta:

a;1,...,a;nê|R|L| = |R| = |R'| = |R'|L| og at <a;1,...,a;n>ê∏;(R|L)(P).

Da har man <a;1,...,a;n>ê∏;R(P) og derfor etter definisjonen av R at <a;1,...,a;n>ê∏;(R;k)(P) for noe k≥1. Da <a;1,...,a;n>ê∏;(R;k|L)(P) og derfor at <a;1,...,a;n>ê∏;(R';k|L)(P) siden R';k|L er en elementær ekstensjon av R;k|L. Men da må man ha <a;1,...,a;n>ê∏;(R'|L)(P). Inklusjonen den andre veien bevises på samme måte.

Dette avslutter beviset for Lemma 6.1. **Q.E.D.**

## §7 Joint-Consistency-teoremet og Craigs interpolasjonsteorem.

La T = ß(Δ, J;0[Ç],L) og T'=ß(Δ',J;0[Ç],L') der L,L'êJ. Med TUT' forstår vi teorien ß(ΔUΔ',J;0[Ç], LUL') der LUL' er J;0-språket der de ikke-logiske symbolene er dem som både er med i L og dem som er med i L'.

Vi sier at *Joint-Consistency-teoremet gjelder for J;0[Ç]* hvis og bare hvis man har for alle L,L'êJ at dersom T og T' er J;0-teorier i henholdsvis L og L' så er TUT' inkonsistent hvis og bare hvis det finnes en lukket formel F slik at T :– F og T' :– ¬F.

Vi skal nå vise:

**Teorem 7.1** La Ç Inkl In(J). Anta Ç er en konstruerbar systemkarakteristikk. Da gjelder Joint-Consistency-teoremet for J;0[Ç].

**Bevis:** La T,T' være J;0[Ç]-teorier og anta at det finnes en lukket formel F slik at T :– F og T:– ¬F. Da har man TUT' :– (F&¬F) og følgelig at TUT' er inkonsistent. Anta nå at det ikke finnes noen slik formel. Vi skal da vise at TUT' er konsistent. Vi bruker "L(T)"

for å betegne språket til T, "L(T')" betegner språket til T'. Vi lar ∑ være mengden av lukkede formler i L(T) som er teoremer i T'. Da er T[∑] konsistent. For ellers ville det ved hjelp av reduksjonsteoremet for konsistens at det finnes et teorem F i T som er en disjunksjon av negasjoner av lukkede teoremer i T', ie. F = (¬G;1v...,¬G;n) der T' :– G;1 &..... &T' :– G;n. Da ville vi ha T :– (¬G;1v...,¬G;n) og T' :– ¬(¬G;1v...,¬G;n). Men dette er umulig etter den antagelsen vi har gjort.

La nå L være språket hvis ikke-logiske symboler er dem som er felles for L(T) og L(T'). Vi skal konstruere en elementær kjede av modeller R;1,R;2,.... som alle er modeller for T og der R;n êSMod;(J;0)(Ç,L) for n≥1. Dessuten skal vi konstruere en elementær kjede av modeller R';1,R';2,.... som alle er modeller for T 'og der R';n êSMod;(J;0)(Ç,L) for n≥1. Vi skal gjøre dette på en slik måte at
R;1|L, R';1|L, R;2|L, R';2|L,..... blir en elementær kjede.

Siden T[∑] er konsistent har den i følge fullstendighetsteoremet for J;0[Ç] en modell. Vi lar R;1êSMod;(J;0)(Ç,L(T)) være en slik modell for T[∑]. La Δ være mengden av alle formler i L. Åpenbart er Δ en regulær formelmengde. La B være en ekspansjon til L(T') av R;1|L. Siden Ç er konstruerbar er den også ekspanderbar og følgelig må en slik modell BêSMod;(J;0)(Ç,L(T')) finnes (Jmf. Lemma 1.2 i §1). Da er de samme formlene i L gyldige i B og R;1. Hvis en formel i L er et teorem i T' er lukningen i ∑ og følgelig er formelen gyldig i R;1. Da er den gyldig i B. Etter modellekstensjonsteoremet må det derfor finnes en modell R';1êSMod;(J;0)(Ç,L(T')) som er en modell for T' og som er en Δ-ekstensjon av B. Da er R';|L en elementær ekstensjon av B|L = R;1|L.

Vi beskriver nå konstruksjonen av de diverse R;n (n=1,2,....). Konstruksjonen av kjeden R';1, R';2, ..... etc er likedan. La C være en ekspansjon av R';(n–1)|L til L(T). En slik ekspansjon CêSMod;(J;0)(Ç,L(T)) finnes siden
R';(n–1)|LêSMod;(J;0)(Ç,L) og systemkarakteristikken Ç er ekspanderbar siden den er konstruerbar. Da er C|L en elementær ekstensjon av R;(n–1)|L og følgelig er C en Δ-ekstensjon av R;(n–1). Etter korollaret til modellekstensjonsteoremet, Korollar 4.4. i §4, følger det at det finnes en Δ-ekstensjon R;nêSMod;(J;0)(Ç,L(T)) av C som er en elementær ekstensjon av R;(n–1). Da er R;n en elementær ekstensjon av R;1 og følgelig en modell for T. R;n|L er en elementær ekstensjon av C|L = R';(n–1)|L.

La R være unionen av R;1,R;2,..... og la R' være unionen av R';1, R';2,..... I følge Tarskis lemma, Lemma 5.3 i §5 er R en elementær ekstensjon av R;1 og følgelig en modell for T. Likedan innser man at R' er en modell for T'. Ved hjelp av Lemm 6.1 har man at:

(0) R'|L = R|L.

Vi konstruerer nå en J;0-modell D for L(T)UL(T') slik:

(a) |D| = |R| = |R'|

(b) *D = *(R) = *(R')

(c) f(D) = f(R')=f(R) (Se punkt (a) – (g) i beviset for Lemma 6.1)

(d) £(D) = £(R)U £(R')

(e) Er x;1,....,x;mê|D| = |R| = '| setter vi:
$f$;<m,n>(D)(x;1,...,x;m) =
$f$;<m,n>(R)(x;1,...,x;m) U $f$;<m,n>(R')(x;1,...,x;m)

(f) Vi definerer så ∏;D. Vi setter:
∏;D(P) = ∏;R(P) om P er et n-ært predikat i L(T)
∏;D(P) = ∏;R'(P) om P er et n-ært predikat i L(T') I lys av (0) er dette veldefinert. På tilsvarende måte defineres ∏;D(u) om u er et n-ært funksjonssymbol, en singulær term i snever forstand eller en konstant i L(T)UL(T').

Dermed er D fullstendig definert. Man ser at D er en J;0-modell for L(T)UL(T') der D|L(T) = R og D|L(T') = R' og der D|L = R|L = R'|L. I lys av Lemma 5.2 har man at RêSMod;(J;0)(Ç,L(T)) og R'êSMod;(J;0)(Ç,L(T')). Dessuten har man at
R|L = R'|L êSMod;(J;0)(Ç,L). Det følger at forutsetningene i konstruerbarhets-kravet (Se §1) er oppfylt. Siden Ç etter forutsetning er konstruerbar må det derfor finnes en D;0ê SMod;(J;0)(Ç,L(T)UL(T')) der man har:

(1) D;0|L(T) = D|L(T) = R og
(2) D;0|L(T') = D|L(T') = R'

Fra (1) og (2) følger at D;0 er e modell for TUT' og derfor at TUT' er konsistent. Dette avslutter vårt bevis for Teorem 7.1. **Q.E.D.**

Vi vender oss nå til interpolasjonsteoremene. Vi sier at *Craigs interpolasjonsteorem gjelder for J;0[Ç]* hvis og bare hvis man har at det følgende er tilfelle:

La T,T' være J;0-teorier. La L(T) og L(T') være språkene til henholdsvis T og T'. Anta (tUT') :– (F–>G) der FêFml(L(T)) og GêFml(L(T')). Da finnes en formel H, som er lukket om F og G er lukket, slik at:

T:– (F–>H) & T :– (H –>G).

Vi skriver "V(F,G)" for "F er en lukket alfabetisk variant av G". Vi definerer en syntaktisk operasjon Vr med karakteristikk <2,0> over J ved:

Vr = UN/LêJ/(Mg(<<F,G>,F>: F,GêFml(L) & V(F,G)))

**Lemma 7.2** Vr er en normal syntaktisk operasjon over L.

Beviset består i å verifisere at Vr er regulær, substituasjonsinvariant og korrekt. Dette er imidlertid nokså åpenbart og overlates til leseren.

Vi definerer et binært indekssystem a;<m,n> av grad m over J ved å sette:

a;<m,n> = <[<m,n>,<m,n>,<m,n>], F*,Vr,1>

der det stipuleres at F*(1)= 0 og F*(2)=1. Det forutsettes naturlig vis at <m,n>êNXN. Vi setter tilslutt:

Var = Mg(a:<m,n>: <m,n>êNXN)

Det følgende lemma er av en viss betydning i det følgende:

**Lemma 7.3** Anta Var Inkl Ç Inkl In(J) og anta Ç er tillatt med hensyn på J. Da har vi at (F<–>G) er et teoren i J;0[Ç] om F er en lukket alfabetisk variant av G.

Vi overlater beviset for denne satsen til leseren.

Den følgende sats er det andre hovedresulatet i denne paragrafen:

**Teorem 7.4** La Ç være en konstruerbar systemkarakteristikk der Ç Inkl In(J) og Var Inkl Ç. Da gjelder Craigs interpolasjonsteorem for J;0[Ç].

**Bevis:** La T,T' være J;0[Ç]-teorier og anta F er en lukket formel i L(T), G en lukket formel i L(T') og at TUT' :– (F–>G). I følge forutsetningene i teoremet og Teorem 7.1 holder da

Joint-Consistency-teoremet for J;0[Ç]. Vi betrakter
T[F]U T'[¬G]. I denne teorien må F,¬G og F–>G være teoremer og den er derfor inkonsistent. Siden Joint-Consistency-teoremet gjelder for J;0[Ç] må det finnes en lukket formel H slik at T[F] :– H og T'[¬G] :– ¬H. Ved hjelp av deduksjonsteoremet har man da at T: – (F–> H) og T' :– (H –> G). I det generelle tilfelle substituerer vi en ny konstant for hver fri variabel i F og på samme måte for G. Vi får lukkede formler F',G' som resultat. Da kan vi på samme måte som ovenfor finne en passende H' slik at U :– F'–>H' og U' :– (H' –> G') hvor U,U' fremkommer fra henholdsvis T og T' ved å legge til de nye konstantene. Etter variantteoremet som gjelder for J;0[Ç] i lys av forutsetningene og Lemma 7.3 kan H' velges slik at ingen av de variablene som er bundet i H' er fri i F eller G. Ved å erstatte nye konstanter med gamle variabler, og ved å bruke konstant-teoremet, kan vi så slutte at det må finnes H slik at: T :– (F–>H) og T' :– (H–>G). **Q.E.D.**

## §8 Et svakere konstruerbarhetskrav. Kriterium for Joint-Consistency og interpolationsteoremet.

Konstruerbarhetskravet kan svekkes noe. La RêSMod;(J;0)(Ç,L). Anta L;1 og L;2 er delspråk av L slik at L=L;1UL;2. Anta:

(1) R|L;1êSMod;(J;0)(Ç, L;1)
(2) R|L;2êSMod;(J;0)(Ç, L;2)
(3) R|(L;1ΩL;2)êSMod;(J;0)(Ç, L;1ΩL;2)

Anta tilslutt at man har:

(4) $f$;<m,n>(R)(x;1,...,x;m) =
$f$;<m,n>(R|L;1)(x;1,...,x;m) U $f$;<m,n>(R|L;2)(x;1,...,x;m)

for alle x;1,...x;mê|R| (m≥0). Kan man nå for alle R,L, L;1 og L;2 der (1) – (4) holder finne en R;c slik at:

(a) (AF)(FêCFm(L;1) & R(F) =1 –> R;c(F)=1) og
(b) (AF)(FêCFm(L;2) & R(F) =1 –> R;c(F)=1)

kalles Ç for *svakt konstruerbar* forutsatt at Ç Inkl In(J) og at Ç er tillatt med hensyn på J.

Det skulle være klart at Teorem 7.1 og Teorem 7.4 fortsatt holder om vi erstatter kravet om at Ç er konstruerbar med kravet om at Ç skal være svakt konstruerbar og i tillegg ekspanderbar.

**Teorem 8.1** Anta Ç inkl In(J) og at Ç er tillatt med hensyn på J. Gjelder Joint-Consistency-teoremet for J;0[Ç] så er Ç svakt konstruerbar.

**Bevis:** La R være en J;0-modell for L, la L;1,L;2 være delspråk av L slik at R, L, L;1 og L;2 oppfyller de krav som er nevn i definisjonen av svak konstruerbarhet, dvs. kravene (1) – (4) ovenfor. La T;1 være J;0[Ç]-teorien hvis språk er L;1 og der de ikke-logiske aksiomene er de formlene i L;1 som er gyldige i R|L;1. La T;2 være J;0[Ç]-teorien hvis språk er L;2 og der de ikke-logiske aksiomene er de formlene i L;2 som er gyldige i R|L;2. Anta nå for reduktio ad absurdum at det finnes en lukket formel F slik at:

(1) T;1 :– F & T;2 :– ¬F

Siden R|L;i (i=1,2) er en modell for T;i følger at F er gyldig i R|L;1 og ¬F er gyldig i R|L;2. Dette innebærer:

(2) R|L;1(F) = 1
(3) R|L;2(F) =0

Vi må ha at F og ¬F er formler i L;1Ω L;2. Videre har vi fra egenskaper ved R at dersom HêCFml((L;1ΩL;2)(R)) så gjelder:

(4) R|L;1(H) = R|(L;1Ω L;2)(H)
(5) R|L;2(H) = R|(L;1Ω L;2)(H)

Fra (2) – (5) følger:

1 = R|(L;1Ω L;2)(H) =0

som åpenbart er umulig. Følgelig finnes det ikke noen lukket formel F slik at (1). Siden Joint-Consistency -teoremet holder for J;0[Ç] følger at T;1UT;2 er konsistent. I lys av kompletthetsteoremet for J;0[Ç] må det finnes en J;0-modell R;c der R;cêSMod;(J;0)(Ç,L) som er en modell for T;1U T;2. Anta FêCfml(L;1) og at R(F) =1. Da har man R|L;1(F)=1 og derfor T;1 :– F ved hjelp av definisjonen av T;1. Siden R;c er en modell for T;1U T;2 har man da R;c(F)=1. Anta FêCFml(L;2) og R(F)=1. Da har man (R|L;2)(F)=t. Ved hjelp av definisjonen av T;2 følger: T;2 :– F. Siden R;c er en modell for T;1UT;2 har man da R;c(F) =1. R;c er den modellen vi søker. Det følger at Ç er svakt konstruerbar. **Q.E.D.**

Vi bemerket ovenfor at det følgende teorem holdt. Beviset er i det vesentlige det samme som for Teorem 7.1:

**Teorem 8.2** Anta Ç Inkl In(J) og at Ç er tillatt med hensyn på J. Er Ç ekspanderbar og svakt konstruerbar holder Joint-Consistency-teoremet for J;0[Ç].

Fra dette teoremet og Teorem 8.1 følger så den følgende sats:

**Teorem 8.3** (Hovedteorem I: Kriterium for "Joint Consistency")
Anta Ç Inkl In(J) og at Ç er tillatt med hensyn på J. Anta Ç er ekspanderbar.
Da holder Joint Consistency-toremet for J;0[Ç] hvis og bare hvis Ç er svakt konstruerbar.

**Bevis:** Satsen er en umiddelbar følge av Teorem 8.1 og 8.2. **Q.E.D.**

**Lemma 8.4** Gjelder Craigs interpolasjonsteorem for J;0[Ç] så gjelder Joint-Consistency-teoremet for J;0[Ç].

**Bevis:** Anta T;1, T;2 er J;0-teorier og at T;1UT;2 er inkonsistent. Da har man at (T;1 U T;2) :– (F &¬F) for noen formel F. Det følger da at (T;1UT;2) :– B for enhvilken som helst formel i språket til T;1UT;2. La B være formelen:

(G;1–>G;1) –> (G;2&¬G;2) der G;1êCFml(L(T;1)) og G;2êCFml(L(T;2)). Siden Craigs interpolasjonsteorem holder forr J;0[Ç] må det finnes en lukket formel B;0 slik at:

T;1 :– (G;1–>G;1) –> B;0 og
T;2 :– (B;0 –> (G;2 &¬G;2))

Fra dette følger T;1 :– B;0 og T;2 :– ¬B;0 som viser at Joint-Consistency-teoremet holder for J;0[Ç]. **Q.E.D.**

Ved hjelp av Teorem 8.2 kan vi bevise det følgende teorem på samme måte som Teorem 7.4 ble bevist ved hjelp av Teorem 7.1:

**Teorem 8.5** Anta Ç Inkl In(J) og at Ç er tillatt med hensyn på J. Anta Ç er ekspanderbar, svakt konstruerbar, og at Var Inkl Ç. Da gjelder Craigs interpolasjonsteorem for J;0[Ç].

Videre har vi som en umiddelbar konsekvens av Lemma 8.4 og Teorem 8.5 at:

**Teorem 8.6** (Hovedteorem II. Kriterium for Craigs interpolasjonsteorem.) Anta Var Inkl Ç Inkl In(J) og at Ç er tillatt med hensyn på J. Anta Ç er ekspanderbar. Da gjelder Craigs

interpolasjonsteorem for J;0[Ç] hvis og bare hvis Ç er svakt konstruerbar.

## §9 Regulære systemkarakteristikker og ekspanderbarhet.

I §1 nevnte vi at en bestemt klasse med systemkarakteristikker, de regulære, var ekspanderbare. Vi skal nå gi en nøyere definisjon av denne klassen.

I det følgende bruker vi

(D1) "f;(n,w)(t;1,...,t;n)" som forkortelse for "(iw)(w=t;1 & t;2=t;2 &....&t;n=t;n)"
(D2) "P;n(t;1,...,t;n)" som forkortelse for "t;1= t;1 &....& t;n=t;n"
(D3) "s;0" som forkortelse for "(ix)(x=x)".

Vi skal anta at uttrykkene "F;(n,w)", "P;n" og "s;0" ikke forekommer i noen J;0-språk.

Anta å at LêJ og FêFml(L). La D være en sekvens av predikater, funksjonssymboler og singulære termer i snever forstand i L. Vi skal da definere en formel Sub;(D,w)(F). La først F' være den formelen som fremkommer når vi erstatter enhver forekomst av et n-ært funksjonssymbol i F som forekommer i sekvensen D med f;(n,w), videre erstatter enhver forkomst av et n-ært predikat i F som forekommer i sekvensen D med P;n og tilslutt erstatter enhver forekomst av en singulær term i snever forstand som forekommer i sekvensen D med s;0. F' vil ikke være noen formel i L siden den inneholder forkortende notasjon. La nå F" være F' helt utskrevet ved hjelp av definisjonene D1 – D3. Vi setter da Sub;(D,w)(F) = F". w er naturligvis et variabeltegn i L.

La nå ¥ være en syntaktisk operasjon med karakteristikk <n,m> over J. Vi sier da at ¥ er *strengt substitusjonsinvariant* hvis og bare hvis man har at det følgende holder generelt:

Er LêJ og <F;1,...,F;n,t;1,...,t;m>ê(B;<n,m>(L)ΩDom(¥)) og w er en variabel som ikke forekommer i F;1,...,F;n,t;1,...,t;m eller ¥(F;1,..,F;n,t;1,...,t;m), så gjelder det at:

Sub;(D,w)(¥(F;1,...,F;n,t;1,...,t;m)) =
¥(Sub;(D,w)(F;1),...,Sub;(D,w)(F;n),Sub;(D,w)(t;1),....,Sub;(D,w)(t;m))

om D er en sekvens av den typen som ble forklart ovenfor i L.

Anta Ç er en systemkarakteristikk over J, ie. Ç Inkl In(J). Vi lar da C;m være mengden av de aêÇ som er av grad m. Vi lar ~(Ç) være mengden av de aêÇ der (a);4 ≠2.

I alle våre J;0-språk har vi inntil nå latt indeksmengden for de intensjonale operatorene være NXN. Vi skal nå tenke oss at den er endelig og at den istedenfor er KXK der K= {0,...,p} for noe naturlig tall p≥0. I det følgende vil vi tenke oss atK er fiksert en gang for alle. Alle de begrepene vi har innført tidligere vil være definert som før bortsett fra at vi nå istedet for NXN bruker KXK som indeksmengde for de intensjonale operatorene. Vi fortsetter å bruke nøyaktig den samme notasjon som før. (J;0)* står for klassen av alle J;0-språk, men nå har naturligvis ethvert Lê(J;0)* bare endelig mange intensjonale operatorer. Vi lar J være et fiksert element i [(J;0)*/ s;2] der s;2 er relasjonen å ha det samme logiske vokabularet begrenset til J;0-språk. Merk at

Var = Mg(a;<m,n>: <m,n>êKXK)

nå er en endelig mengde.

La Ç Inkl In(J). Da er Ç *regulær* hvis og bare hvis Ç oppfyller de følgende krav:

(i) Ç er tillatt med hensyn på J i den forstand at:
(AL)(LêJ –> (Aa)(aêÇ –> E(a,L) Inkl Val;L(Mod*;(J;0)({a},L))))

(ii) Ç er endelig og Var Inkl Ç
(iii) For alle aêÇ er (a);3 en strengt substitusjonsinvariant syntaktisk operasjon.

Vi trenger også de følgende begreper. Med et *formelsystem* i LêJ forstår vi en funksjon SêPt(Fml(L))^K. Et formelsystem er altså en funksjon som til ethvert tall i K={0,...,p} tilordner tallet en delmengde av formler i L. Men *kvasiformel* i L forstås en funksjon v som er med i CFml(L)^K. Vi bruker v;1,v;2,... etc. for kvasiformler. Vi sier at en kvasiformel v er med i formelsystemet S hvis og bare hvis v(n)êS(n) for alle nêK. Er S(n)=ø sier vi at v(n)êS(n) om v(n) er den tomme formelen, dvs. formelen uten lengde.

Vi har nå innført de begrepene som trengs for å kunne formulere og bevise den følgende sats:

**Teorem 9.1** La Ç Inkl In(J). Er systemkarakteristikken Ç regulær er den også ekspanderbar.

**Bevis:** La RêSMod;(J;0)(Ç,L). La L' være en utvidelse av L med noen nye ikke-logiske symboler. Vi skal vise at det finnes en R" der R"êSMod;(J;0)(Ç,L) slik at R"|L = R. (Jmf. definijonen av "ekspanderbar" i §1). Vi skal først konstruere en R'êSMod*;(J;0)(Ç,L'). R' defineres på den følgende måte:

(i) La u være et ikke-logisk symbol i L. Da setter vi R'(u) = R(u).
(ii) La u være et ikke-logisk symbol i L' som ikke er med i L. Er u et n-ært predikat setter vi R'(u) = R Inkl |R|^n for en eller annen relasjon. Er u et n-ært funksjonssymbol lar vi R'(u) være en funksjon med |R|^n som domene og verdiområdet inkudert i |R|. Vi lar R'(u) være et objekt i |R|U{*} om u er en singulær term i snever forstand i L' og R'(u) et objekt i |R| om u er en konstant.
(iii) Vi setter |R'| = |R|
(iv) Vi setter f(R')=f(R) og lar £(R') være £(R) utvidet med alle de ikke-logiske symbolene i L' som ikke er med i L. Vi har altså at Const(£(R')) = Const(£(R)) = Rgn(f(R)).
(v) Vi setter g(R')(u)= u om u er et ikkelogisk symbol i L' som ikke er noen konstant. Er e en konstant i L' har vi g(R')(e) = f(R')(R'(e)).

Det eneste som nå gjenstår er å definere de diverse operator-funksjonene $f$;<m,n>(R')(x;1,...,x;m). Vi skal nå gjøre dette.

La m være fiksert og anta x;1,...,x;mê|R|. Betrakt formelsystemet:

<$f$;<m,n>(R)(x;1,...,x;m)>/nêK/ i £(R)

Vi skal utvide dette til et formelsystem <S;(n,x;1,...,x;m)>/nêK/ i £(R'). Dette vil skje ved en induktiv prosess. Siden Ç er regulær er Ç en endelig mengde. Vi har derfor at ~(Ç;m) = {a;1,....,a;q} for noe naturlig tall q. Vi skal definere en sekvens av formelsystemer S;(x;1,...,x;m)(k) der kêN.

Vi setter først:

S;(x;1,...,x;m)(0) = <$f$;<m,n>(R)(x;1,...,x;m)>/nêK/

Vi definerer så S;(x;1,...,x;m)(p*q+(i+1)) gitt S;(x;1,...,x;m)(p*q+i) der pêN og 0≤i<q. Anta

a;(i+1) = <[<m,d;1>,.....,<m,d;(n+1)>], F*,¥,r> der 0≤i<q. Siden a;(i+1)ê(~(Ç;m)) har vi at r =0,1.

Tilfelle (a): r=0. Anta

(1) <F;1,....,F;n,f(R')(x;1),...,f(R')(x;m)>êCB;<n,m>(£(R'))ΩDom(¥)

og anta at F;kêS;(n,x;1,...,x;m)(p*q+i)(d;k) om F*(k)=1.

Er da G= ¥(F;1,....,F;n,f(R')(x;1),...,f(R')(x;m)) ikke med i S;(x;1,...,x;m)(p*q+i)(d;(n+1)) utvider vi S;(x;1,...,x;m)(p*q+i)(d;(n+1)) med G. Resultatet av å utvide denne mengden med alle slike G kaller vi Δ.

Vi setter:

S;(x;1,...,x;m)(p*q+(i+1))(r) = Δ om r=d;(n+1)

S;(x;1,...,x;m)(p*q+(i+1))(r) = S;(x;1,...,x;m)(p*q+(i))(r) om r≠d;(n+1)

Tilfelle (b): r=1. Anta

(1) <F;1,....,F;n,c1,...,c;p>êCB;<n,p>(£(R'))ΩDom(¥)

og anta at F;kêS;(n,x;1,...,x;m)(p*q+i)(d;k) om F*(k)=1.

Er da G= ¥(F;1,....,F;n,f(R')(x;1),...,f(R')(x;m)) ikke med i S;(x;1,...,x;m)(p*q+i)(d;(n+1)) utvider vi S;(x;1,...,x;m)(p*q+i)(d;(n+1)) med G. Resultatet av å utvide denne mengden med alle slike G kaller vi Δ.

Vi setter:

S;(x;1,...,x;m)(p*q+(i+1))(r) = Δ om r=d;(n+1)

S;(x;1,...,x;m)(p*q+(i+1))(r) = S;(x;1,...,x;m)(p*q+(i))(r) om r≠d;(n+1)

Dette avslutter vår definisjon av formelsystemsekvensen <S;(x;1,...,x;m)(v)>/vêN/.
Man setter så :

¶;(x;1,.....,x;m)(n) = UN/i,0,∞/(S;(x;1,...,x;m)(i)(n)) for alle nêK

Vi har dermed definert et formelsystem ¶;(x;1,...,x;m) i £(R').

Definisjonen av R' kan nå gjøres fullstendig ved at vi definerer de diverse *f*;<m,n>(R') ved:

*f*;<m,n>(R') = ¶;(x;1,...,x;m)(n)

Vi må vise at R'êSMod;(J;0)(Ç,L'). Det er tilstrekkelig å vise T(Ç,R') og derfor at at Sat(<x;1,...,x;m>,a,R') om aêÇ;m. Etter konstruksjonen av formelsystemet ¶;(x;1,..,x;m) har man åpenbart at Sat(<x;1,...,x;m>,a,R') om aê(~(Ç;m)). Vi må imidlertid vise at dette også holder om aê(Ç;m – (~(C;m))). Det er derfor nødvendig å vise:

(A) (Aa)(aê(Ç;m – (~(C;m))) –> Sat(<x;1,...,x;m>,a,R'))

For å kunne gi et bevis for dette trenger vi noen definisjoner.

La a = <[<m,q(1)>,...,<m,q(n+1)>],F*,¥,r> være et vilkårlig indekssystem i ~(Ç;m). La G,G;1,...,G;s være formler i £(R').

*Vi sier da at G fremkommer ved å anvende a på G;1,....,G;s* hvis og bare hvis det følgende gjelder:

Tilfelle (i): r=0. Det finnes

<F;1,....,F;n,f(R')(x;1),...,f(R')(x;m)>êCB;<n,m>(£(R'))ΩDom(¥)

der G= ¥(F;1,....,F;n,f(R')(x;1),...,f(R')(x;m)) og hvor vi har {G;1,...,G;s} er mengden av de F;k der F*(k)=1.

Tilfelle (ii): r=1. Da har ¥ karakteristikk<n,p> der pêN. I så fall må det finnes

<F;1,....,F;n,c;1,...,c;p>êCB;<n,m>(£(R'))ΩDom(¥) der G=¥(F;1,....,F;n,c;1,...,c;p) og hvor vi har {G;1,...,G;s} er mengden av de F;k der F*(k)=1.

Med ~(Ç;m)-bevis i £(R') utfra formelsystemet S;(x;1,...,x;m)(0) forstår vi en sekvens av formler H;0,...,H;p der vi har at H;s (0≤ s ≤p) enten er med i S;(x;1,...,x;m)(0)(j) for noe jêK eller er fremkommet ved å anvende aê(~(Ç;m)) på H;(i;1)....H;(i;r) der

i;1,...,i;r≤s og i;1,...,i;rê{0,...,p}. Det er lett å vise at en formel H i £(R') er med i ¶; (x;1,...,x;m)(j) for noe jêK hvis og bare hvis det finnes et (~(Ç;m))-bevis H;0,...,H;p for H utfra S;(x;1,...,x;m)(0) der H;p=H.

Med (~(C;m))-bevis i £(R) utfra formelsystemet S;(x;1,...,x;m)(0) forstår vi nøyaktig det samme som ovenfor, men vi krever nå at formlene i beviset skal være formler i £(R). Det er også lett å vise at at HêS;(x;1,...,x;m)(0)(j) for noe jêK hvis og bare hvis det finnes et ~(Ç;m)-bevis H;0,...,H;p der H;p=H i £(R) utfra S;(x;1,...,x;m)(0). Dette er fordi modellen R oppfyller systemkarakteristikken Ç.

Etter disse forberedelsene kan vi nå vende oss mot beviset for (A). Anta aê(Ç;m) – (~(Ç;m)). Da er a = <[<m,q(1)>,...,<m,q(n+1)>],F*,¥,r> der r=2. Anta nå at: <F;1,...,F;;n>ê(C;<n,0>(£(R'))ΩDom(¥)) og at

F;kê¶;(x;1,...,x;m)(q(k)) = *f*;<m,q(k)>(R')(x;1,...,x;m) for de k der F*(k)=1.

Anta dessuten for reduktio ad absurdum at:

(¬¥(F;1,...,F;k))ê¶;(x;1,...,x;m)(q(n+1))= *f*;<m,q(n+1)>(R')(x;1,...,x;m).

Siden F;kê¶;(x;1,...,x;m)(q(k)) for de k der F*(k)=1 må det for hvert slik k finnes et ~(Ç;m)-bevis H;(k,1),....,H;(k,t;k) i £(R') utfra S;(x;1,...,x;m)(0) der H;(k,t;k) = F;k. Likeledes må det finnes et ~(Ç;m)-bevis H;(n+1,1),....,H;(n+1,t;(n+1)) i £(R') ut fra S;(x;1,...,x;m)(0) for ¬¥(F;1,...,F;n) der ¬¥(F;1,...,F;n) = H;(n+1,t;(n+1)).

La nå D være sekvensen av alle de ikke-logiske symbolene som opptrer i disse bevisene og som ikke forekommer i £(R). La videre x være en variabel som ikke forekommer i noen av disse bevisene. Siden alle de syntaktiske operajonene i Ç er strengt substitusjonsinvariante (Ç skulle være regulær) ser man lett at:

Sub;(D,x)(H;(k,1)),...., Sub;(D,x)(H;(k,t;k))= Sub;(D,x)(F;k) er et ~(Ç;m)-bevis i £(R) for Sub;(D,x)(F;k) ut fra S;(x;1,...x;m)(0). Men dette innebærer at:

(1) Sub;(D,x)(F;k) ê S;(x;1,...,x;m)(0)(q(k))= *f*;<m,q(k)>(R)(x;1,...,x;m)

Tilsvarende har vi at

Sub;(D,x)(H;(n+1,1)),...., Sub;(D,x)(H;(n+1,t;(n+1)))= Sub;(D,x)(¬¥(F;1,...,F;n)) er et ~(Ç;m)-bevis i £(R) for Sub;(D,x)(¬¥(F;1,...,F;n)) ut fra S;(x;1,...x;m)(0). Men dette innebærer at:

(2) Sub;(D,x)(¬¥(F;1,..,F:k)) =
¬¥(Sub;(D,x)(F;1),...,Sub;(D,x)(F;n)) ê S;(x;1,...,x;m)(0)(q(n+1))=
*f*;<m,q(n+1)>(R)(x;1,...,x;m)

Men (1) og (2) er uforenelig med at Sat(<x,1,...,x;m>,a,R); noe som må være tilfelle siden RêSMod;(J;0)(Ç,L). Dette avslutter vårt bevis for (A). Vi har dermed bevist R'êSMod;(J;0)(Ç,L').

Vi definerer nå en modell R"êSMod*;(J;0)(L') som er nøyaktig som R' bortsett fra at vi setter:

(3) *f*;<m,n>(R")(x;1,...,x;m) = *f*;<m,n>(R')(x;1,...,x;m)Ω Tr;L'(R')

om <m,n> er indeksen til en streng intensjonal operator. I følge Lemma 2.1 i §2 har man da at at R"êSMod*;(J;0)(Ç,L). Videre har man at:

(4) R"(F) = R'(F) for alle FêCFm(L(R')) og dessuten at:

(5) *f*;<m,n>(R")(x;1,...,x;m) Inkl Tr;L'(R")

Fra (5) følger :

g(R")(F)ê*f*;<m,n>(R")(x;1,...,x;m) –> R"(F)=1 og derfor at

R"(T;<m,n>(t;1,..,t;m))=1 <–> g(R")(F)ê*f*;<m,n>(R")(x;1,...,x;m)

om <m,n> er indeksen til en streng intensjonal operator. Vi kan derfor se på R" som en J;0-modell av det andre slaget. Dette innebærer at vi har:

R"êSMod;(J;0)(Ç,L')

Det gjenstår nå bare å vise at R"|L = R. Det vil være tilstrekkelig å bevise:

$f$;<m,n>(R"|L)(x;1,...,x;m) = $f$;<m,n>(R)(x;1,...,x;m), dvs.

(6) $f$;<m,n>(R')(x;1,...,x;m) Ω CFml(£(R) ΩTr(R') = $f$;<m,n>(R)(x;1,...,x;m)

om <m,n> er indeksen til en streng intensjonal operator og dessuten at:

(7) $f$;<m,n>(R')(x;1,...,x;m) Ω CFml(£(R) = $f$;<m,n>(R)(x;1,...,x;m)

om <m,n> er indeksen til en svak intensjonal operator.

Faktisk kan man vise at (7) holder for alle <m,n>êKXK. (a) Inklusjonen mot venstre: Vi har:

Fê$f$;<m,n>(R)(x;1,...,x;m) = S;(x;1,...,x;m)(0)(n) Inkl ¶;(x;1,...,x;m)(n) = $f$;<m,n>(R')(x;1,...,x;m)

(b) Inklusjonen mot høyre: Anta FêCfml(£(R)) & Fê$f$;<m,n>(R')(x;1,...,x;m). Da har vi etter konstruksjonen av $f$;<m,n>(R') at Fê¶;(x;1,...,x;m)(n). Da må det finnes et ~(Ç;m)-bevis G;0,.....,G;p i £(R') ut fra S;(x;1,...,x;m)(0) for F der vi har F=G;p. La D være en liste over de ikke-logiske symbolene som forekommer i dette beviset og som ikke er med i £(R). Siden alle de syntaktiske operasjonene i Ç er strengt substitusjonsinvariante følger det at:

Sub;(D,x)(G;1),...., Sub;(D,x)(G;p) = Sub;(D,x)(F) er et ~(Ç;m)-bevis i £(R) utfra S;(x;1,...,x;m)(0). Da må Sub;(D,x)(F)ê S;(x;1,...,x;m)(0)(n) = $f$;<m,n>(R)(x;1,...,x;m). Men siden FêCFml(£(R)) har vi åpenbart at Sub;(D,x)(F)= F. Det følger at

Fê$f$;<m,n>(R)(x;1,...,x;m) som er det vi ønsker.

Ved hjelp av (7) kan man ved et enkelt induksjonsbevis godtgjøre at

(8) R'(F) = R(F) om FêCFml(L(R))

Vi overlater dette til leseren fordi det er en ren rutine-oppgave. La oss tilslutt vise at (6) ovenfor holder:

Inklusjonen mot høyre er åpenbar i lys av (7). Anta

(9) Fê$f$;<m,n>(R)(x;1,...,x;m). Siden <m,n> er indeksen til en streng intensjonal operator og RêSMod;(J;0)(Ç,L) har vi $f$;<m,n>(R)(x;1,...,x;m) inkl Tr;L(R) og derfor i lys av (9) at det finnes H slik at:

(10) F=g(R)(H) = g(R')(H) & R(H)=1 der HêCFml(L(R))

Fra (8) og (9) har vi:

(11) R'(H)=1

Men siden HêCFml(L(R)) og g(R')(H) =F følger at FêTr;L'(R'). Dette, det faktum at FêCFml(£(R)) og det at $f$;<m,n>(R)(x;1,...,x;m) Inkl $f$;<m,n>(R')(x;1,...,x;m) gir :

Fê$f$;<m,n>(R')(x;1,...,x;m) Ω CFml(£(R) ΩTr(R') som er det vi ønsker.

Dette avslutter vårt bevis for Teorem 9.1 **Q.E.D.**

Fra Teorem 9.1, Teorem 8.3 og Teorem 8.6 har man umiddelbart:

**Teorem 9.2** Anta Ç Inkl In(J) og at Ç er regulær. Da gjelder Joint-Consistency-teoremet for J;0[Ç] hvis og bare hvis Ç er svakt konstruerbar.

Dessuten har man:

**Teorem 9.3** Anta Ç Inkl In(J) og at Ç er regulær. Da gjelder Craigs interpolasjonsteorem for J;0[Ç] hvis og bare hvis Ç er svakt konstruerbar.

Som en konsekvens av Teorem 9.1 har man det følgende viktige lemma:

**Lemma 9.4** Anta Ç Inkl In(J) og at Ç er regulær. La L' være en utvidelse av L med noen nye ikke-logiske symboler. Anta L,L'êJ. Da gjelder:

Th(J;0[Ç],L')ΩFm(L) = Th(J;0[Ç], L)

**Bevis:** Anta FêTh(J;0[Ç],L')ΩFm(L). La R være et vilkårlig element i SMod;(J;0)(Ç,L). Siden Ç er regulær er Ç ekspanderbar. Det må derfor finnes en R'êSMod;(J;0)(Ç, L) slik at (1) R'|L = R. Siden Ç er regulær er Ç tillatt med hensyn på J. Man har derfor:

(2) Th(J;0[Ç], L') Inkl Val;L'({R'})

Siden FêTh(J;0[Ç],L')ΩFm(L) har vi derfor i lys av (1) og (2) at R := F. Men R var et vilkårlig element i SMod;(J;0)(Ç,L). Vi har derfor:

(AR)(RêSMod;(J;0)(Ç,L) –> R := F).

Men fra dette og fullstendighetsteoremet for J;0 følger herav FêTh(J;0[Ç],L).
At Th(J;0[Ç],L) Inkl Fml(L) Ω Th(J;0[Ç], L') er åpenbart. **Q.E.D.**

Vi skal anvende Lemma 9.4 i neste avsnitt.

## §10 Craigs interpolasjonsteorem for spesielle logikker.

I denne paragrafen skal vi anvende teoremene i de foregående avsnitt. Vi skal vise at Craigs interpolasjonsteorem holder for en rekke modallogikker. Det bør nevnes at det vi skal gjøre er å gi eksempler på anvendelser av hovedteoremene i §8 – §9, ikke uttømme alle anvendelsesmuligheter. Langt mer vidløftige eksempler kan gis enn dem vi skal begrense oss til her.

I forrige avsnitt lot vi indeksmengden for de intensjonale operatorene være KXK der K={0,...,n} for noe naturlig tall n. Vi setter nå K={0}. Bare J;0-språk som inneholder én intensjonal operator av grad 0, "T:<0,0>" tas derfor i betraktning. Vi skal dessuten anta denne operatoren er ikke-streng.

I dette avsnittet vil fire funksjoner F;1,...,F;4 der F;j : Pt(In(J)) –> Pt(In(J)) (j= 1,..,4) bli betraktet. Man har altså for hver av disse funksjonene at dersom
Ç Inkl In(J) så er F;j(Ç) Inkl In(J).

Imidlertid viser det seg først hensiktsmessig å definere noen syntaktiske operasjoner over J. Vi definerer først operasjonen π;1 ved:

(1) π;1 = UN/LêJ/(Mg(<<F,F–>G>,G>: F,GêFml(L)))

Det er lett å vise at π;1 er en funksjon og at den er en normal syntaktisk operasjon over J. Dernest definerer vi, om Ç Inkl In(J), de følgende operajoner:

(2) π;2(Ç) = UN/LêJ/(Mg(<<F,G>,G>: (F <–> G)êTh(J;0[Ç],L)))
(3) π;3(Ç) = UN/LêJ/(Mg(<<F,G>,G>: (F –> G)êTh(J;0[Ç],L)))
(4) π;4(Ç) = UN/LêJ/(Mg(<F,F>: F êTh(J;0[Ç],L)))

Det skulle være klart at π;2(Ç), π;3(Ç) og π;4(Ç) er syntaktiske operasjoner over J med henholdsvis karakteristikk <2,0>, <2,0> og <1,0>. Til hver av disse operasjonene skal vi nå definere et korresponderende indekssystem. Vi setter

(5) a;1 = <[<0,0>,<0,0>,<0,0>], F;1*,π;1,r;1>

der r;1 = 0 og F;1* definert ved at F;1*(1) = F;1*(2) = 1.

Dernest defineres indekssystemet a;2(Ç) ved:

(6) a;2(Ç) = <[<0,0>,<0,0>,<0,0>], F;2*,π;2(Ç),r;2>

der r;2=0 og der funksjonen F;2* er fiksert ved: F;2*(1)=1 og F;2*(2)=0. Tilsvarende defineres a;3(Ç) ved:

(7) a;3(Ç) = <[<0,0>,<0,0>,<0,0>], F;3*,π;3(Ç),r;3>

der r;3 =0 og der funksjonen F;3* er fiksert ved: F;3*(1)=1 og F;3*(2)=0.

Endelig definerer vi a;4(Ç) ved:

(8) a;4(Ç) = <[<0,0>,<0,0>], F;4*,π;4(Ç), r;4>

der r;4 =0 og der funksjonen F;4* er fiksert ved: F;3*(1)=1 .

Vi definerte tidligere Var ved Var = Mg(a;<m,n>: <m,n>êNXN). Siden vi nå lar indeksmengden for de intensjonale operatorene være {<0,0>} følger det at Var = {a;<0,0>} der a;<0,0> er definert som i §7. De fire operasjonene F;1 – F;4 som ble nevnt ovenfor er definert slik:

F;1(Ç) = {a;2(Ç)} U Var
F;2(Ç) = {a;3(Ç)} U Var
F;3(Ç) = {a;3(Ç), a;1} U Var
F;4(Ç) = {a;4(Ç)} U Var

Vi definerer F;q/n/(Ç), der Ç er en systemkarakteristikk og n et naturlig tall , ved induksjon på den følgende måte:

(i) F;q/0/(Ç) = ÇUVar
(ii) F;q/n+1/(Ç) = F;q(F;q/n/(Ç)) (1≤ q ≤ 4)

For den videre utvikling trenger vi d følgende hjelpesetninger:

**Lemma 10.1** Er Ç Inkl In(J) tillatt med hensyn på J så er F;q(Ç) for q= 1– 4 også tillatt med hensyn på J.

**Lemma 10.2** Er Ç Inkl In(J) og er Ç en regulær systemkarakteristikk er også F;q(Ç) en regulær systemkarakteristikk. (q=1,...,4)

**Lemma 10.3** Er Ç Inkl In(J) og er Ç en regulær systemkarakteristikk så er F;q/n/(Ç) for n≥0 og q=1,...,4 også en regulær systemkarakteristikk.

Tilslutt trenger vi:

**Lemma 10.4** Anta LêJ og at q ê{1,...,4}. Da gjelder:
Th(J;0(F;q/n/(ø)), L) Inkl Th(J;0(F;q/n+1/(ø)), L) om n≥0

Av plasshensyn utelater vi bevisene for Lemma 10.1 – 10.4 og overlater dem til leseren. Bevisene er av en rutinemessig karakter.

Den følgende sats er viktig:

**Teorem 10.5** Anta Ç Inkl In(J) og at Ç er en regulær systemkarakteristikk. Gjelder Craigs

interpolasjonsteorem for J;0[Ç] gjelder dette teoremet også for J;0(F;q(Ç)) der $1 \leq q \leq 4$.

**Bevis:** Det vil være tilstrekkelig å bevise at F;q(Ç) er konstruerbar om hypotesene i teoremet holder. Påstanden vil så følge ved hjelp av Teorem 9.3.
Anta derfor at RêSMod;(J;0)(L). La L;1, L;2 være delspråk av L slik at L = L;1U L;2. Anta

(i) R|L;iê SMod;(J;0)(F;q(Ç)L) (i=1,2) og dessuten at

(ii) R|(L;1ΩL;2)êSMod;(J;0)(F;q(Ç),L;1ΩL;2)

I det følgende bruker vi "R;i" som forkortelse for "R|L;i" (i=1,2). Siden vi nå også har å gjøre med bare en intensjonal operator i språkene skriver vi også "$f$(R)" isteden for "$f$;<0,0>(R)". Anta videre:

(iii) $f$(R) = $f$(R;1)U$f$(R;2)

I det følgende skal vi også bruke "£" som forkortelse for "£(R)" og "£;i" som forkortelse for "£(R|L;i)" (i=1,2).

Vi ønsker å konstruere en R'êSMod;(J;0)(F;q(Ç),L) som er slik at:

(1) R'|L;i = R|L;i (i=1,2) og

(2) R'|(L;1ΩL;2) = R|(L;1ΩL;2)

Vi skal se på de fire tilfellene der q er henholdsvis 1,...,4.

Tilfelle (i): q=1. Siden T(F;1(Ç),R|L;i) (i=1,2) har vi at:

(3) (J;0[Ç], £;i) :– ( F<–>G) –> (Fê$f$(R|L;i) <–> Gê$f$(R|L;i)) for i=1,2

Vi bruker "E;(S,L)(G)" som forkortelse for "Mg(F: (S,L) :– (F<–> G))". Definer nå Q ved å sette:

(4) Q = UN/Fê$f$(R)/(E;(J;0[Ç],£)(F))

Definer så en modell R' ved å la R' være nøyaktig som R unntatt ved at $f$(R') = Q. Fra (4) ser man da at dersom (J;0[Ç],£) :– (F<–> G) så gjelder:

Fê$f$(R') <–> Gê$f$(R')

Etter definisjonen av "T(F;1(Ç), R')" innebærer dette at T(F;1(Ç), R').

Vi skal vise:

(5) R'|L;i = R|L;i (i=1,2).

Siden det umiddelbart følger fra dette at R'|(L;1ΩL;2) = R|(L;1ΩL;2) følger det at F;1(Ç) er konstruerbar. For å vise at (5) holder er det tilstrekkelig å bevise:

(6) $f$(R')ΩCFml(£;i) = $f$(R;i)

Det er åpenbart at f(R;i) Inkl $f$(R')ΩCFml(£;i). Vi viser inklusjonen den andre veien i tilfelle i=1. Tilfellet i=2 behandles på nøyaktig samme måte. Anta derfor Fê CFml(£;1)Ω $f$(R'). Da har man FêQ. Da finnes det Gê$f$(R) = $f$(R;1)U$f$(R;2) slik at

(7) (J;0[Ç], £) :– (G <–> F)

Anta Gê$f$(R;1). Da har man at GêCFml(£;1) Da er (G<–>F)êCFml(L;1). Siden Ç er regulær har vi da ved hjelp av (7) og Lemma 9.4 at

(J;0[Ç], £;1) :– (G <–> F)

Siden Gê$f$(R;1) har vi følgelig i lys av (3) at Fê$f$(R;1) som er det vi ønsker.

Anta på den annen side Gê$f$(R;2). Da er GêCFml(£;2). Fra (7) har man:

(8) (J;0[Ç], £) :– (F –> G) & (J;0[Ç], £) :– (G –> F)

Siden Craigs interpolasjonsteorem etter forutsetningene holder for J;0[Ç] må det finnes interpolasjonsformler H;1, H;2êCFml(£;1Ω£;2) slik at:

(9) (J;0[Ç], £;1) :– (F –> H;1) & (J;0[Ç], £;2) :– (H;1 –> G)

(10) (J;0[Ç], £;2) :– (G –> H;2) & (J;0[Ç], £;1) :– (H;2 –> F)

Fra (9) og (10) følger:

(J;0[Ç], £;1) :– (H;2 –> H;1) & (J;0[Ç], £;2) :– (H;1 –> H;2)

Siden L;1 og L;2 er utvidelser av L;1ΩL;2 og H;1 og H;2 er lukkede formler i L;1Ω;L;2 har man i lys av Lemma 9.4 at

(J;0[Ç], £;1Ω£;2) :– (H;2 –> H;1) & (J;0[Ç], £;1Ω£;2) :– (H;1 –> H;2)
Men herav følger:
J;0[Ç], £;1Ω£;2) :– (H;2 <–> H;1)
Dette (9) og (10) gir en:
(11) (J;0[Ç], £;2) :– (G <–> H;1) & (J;0[Ç], £;1) :– (F <–> H;1)
Nå var Gê$f$(R;2). I lys av (11) og (3) må man derfor ha H;1ê$f$(R;2). Men H;1êCFml(£;1Ω£;2). Det følger derfor at:

H;1 ê$f$(R;2)ΩCFml(£;1)
= ($f$(R)ΩCFml(£;2))ΩCFml(£;1)
= ($f$(R)ΩCFml(£;1))ΩCFml(£;2)
= $f$(R;1)ΩCFml(£;2)

Herav har man H;1ê$f$(R;1). I lys av (3) og (11) må man da ha Fê$f$(R;1) som er det vi ønsker. Vi har nå vist at (5) holder. Det følger at F;1(Ç) er konstruerbar.

Tilfelle (ii): q=2. Vi bruker "R;i" som forkortelse for "R|L;i" (i=1,2). Man har, siden R;i ê SMod;(J;0)(F;2(Ç),L;i) for i=1,2 at:
(12) (J;0[Ç], £;i) :– ( F–>G) –> (Fê$f$(R|L;i) –> Gê$f$(R|L;i)) for i=1,2
Vi bruker "C;(S,L)(F)" som forkortelse for "Mg(G: (S,L) :– (F –> G))". Definer en J;0-modell R' ved å stipulere at den skal være nøyaktig som R unntatt ved at man setter:
(13) $f$(R') = Q = UN/Fê$f$(R)/(C(J;0(Ç),£)(F))
Det er lett å vise at T(R',F;2(Ç)). Vi må imidlertid vise at
(14) R'|L;i = R|L;i (i=1,2).
Det vi da følge at F;2(Ç) er konstruerbar. Det vil være tilstrekkelig å bevise:
(15) $f$(R')ΩCFml(£;i) = $f$(R;i) (i=1,2).
Vi ser bare på det tilfelle at i=1 siden tilfellet der i=2 er helt analogt. Inklusjonen mot venstre i (15) er triviell. Inklusjonen mot høyre: Anta FêCFml(£;1) og at Fê$f$(R'). I følge (13) må det finnes Gê$f$(R) slik at :
(16) (J;0[Ç], £) :– ( G–>F)
Siden $f$(R) = $f$(R;1)U$f$(R;2) må man betrakte to tilfeller: Er Gê$f$(R;1) har vi følgelig at (G–>F)êCFml(£;1) og derfor i lys av Lemma 9.4 og (16) at
(17) (J;0[Ç], £;1) :– ( G–>F) Men siden Gê$f$(R;1) følger fra dette og (12) at Fê$f$(R;1) som er det vi ønsker.
Er på den annen side Gê$f$(R;2) har vi at GêCFml(£;2). Siden Craigs interpolasjonsteorem etter hypotese holder for J;0[Ç] har vi derfor i lys av (16) at det finnes en interpolasjonsformel H slik at:
(18) (J;0[Ç], £;2) :– ( G–>H) & (J;0[Ç], £;1) :– ( H–>F)
Siden GêCFml(£;2) følger fra (12) og (18) at Hê$f$(R;2) Inkl $f$(R). Men H er også en formel i £;1 og derfor har vi Hê$f$(R)ΩCFml(£;1) =$f$(R;1). Da har vi igjen i lys av (12) og (18) at Fê$f$(R;1). Dette er hva vi ønsker. Dette viser at F;2(Ç) er konstruerbar.

Tilfelle (iii): q=3 .K(Δ) der Δ Inkl Fm(L) for noe LêJ står i akkurat dette avsnittet for mengden av alle konjunksjoner G;1&....&G;n der G;1,...,G;nêΔ (n≥1). Vi har nå siden R;i tilfredsstiller F;3(Ç) at:
(19) (J;0[Ç], £;i) :– ( F–>G) –> (Fê$f$(R;i) –> Gê$f$(R;i)) for i=1,2
(20) Fê$f$(R;i) & (F–>G)ê$f$(R;i) –> Gê$f$(R;i) (i=1,2)
Vi definerer en modell R' ved å la den være nøyaktig som R unntatt ved at vi setter:
(21) $f$(R') = UN/FêK($f$(R))/(C(J;0(Ç),£)(F))
For å vise at T(F;3(Ç), R') må man da vise at $f$(R') er lukket under modus ponens og at man har Fê$f$(R') –> Gê$f$(R') om (J;0[Ç], £) :– ( F–>G). I lys av (21) er det ikke vanskelig å se at begge påstandene holder.

For å vise at F;3(Ç) er konstruerbar er det derfor tilstrekkelig å vise:

(22) R'|L;i = R|L;i (i=1,2)

I lys av definisjonen av R' er dette tilfelle om:

(23) $f$(R') Ω CFml(£;i) = $f$(R;i) (i=1,2).

Her er inklusjonen mot venstre triviell. Anta derfor at:

(24) Fê$f$(R') Ω CFml(£;1)

Vi undersøker bare det tilfelle der i=1. Er i=2 går man frem på nøyaktig den samme måten.

Fra (21) og (24) følger i lys av at $f$(R)= $f$(R;1)U$f$(R;2) at det finnes D;1,...,D;mê$f$(R;1) og G;1,...,G;nê$f$(R;2) slik at:

(25) (J;0[Ç], £) :– D;1&....&D;m &G;1&....&G;n –> F

Er n=0 bruker man Lemma 9.4 til å etablere:

(J;0[Ç], £;1) :– D;1&....&D;m –> F

og følgelig at Fê$f$(R;1) i lys av (19) og (20) og det faktum at D;1,...,D;mê$f$(R;1).

Er n>0 må vi ha, siden Craigs interpolasjonsteorem i lys av forutsetningene holder for J;0[Ç] at det finnes en lukket formel HêCFml(£;1Ω£;2) der:

(26) (J;0[Ç], £;2) :– G;1&....&G;n –> H

(27) (J;0[Ç], £;1) :– H –> (D;1&....&D;m –> F)

Siden G;1,...,G;nê$f$(R;2) har man i lys av (19), (20) og (26) at Hê$f$(R;2) Inkl $f$(R). Men H er også en formel i CFml(£;1). Derfor Hê$f$(R;1). Men dette, (19), (20) og (27) impliserer at Fê$f$(R;1). Dette er hva vi ønsker. Det følger at F;3(Ç) er konstruerbar.

Tilfelle (iv): q=4. Da har man siden T(F;4(Ç), R;i) at:

F,(F–>G)ê$f$(R;i) –> Gê$f$(R;i) (i=1.2) og dessuten at:

(J;0[Ç],£;i) :– F –> Fê$f$(R;i) (i=1,2)

Vi definerer en J;0-modell R' ved å stipulere at den skal være nøyaktig som R unntatt ved at vi setter:

(+) $f$(R') = $f$(R') = UN/FêK($f$(R))/(C(J;0(Ç),£)(F))

Vi må vise at T(F;4(Ç), R'). At $f$(R') er lukket under modus ponens er åpenbart. Anta:

(22) (J;0[Ç],£) :– F Siden $f$(R) er ikke-tom finnes Gê$f$(R). Da har man ved hjelp av (22) at (J;0[Ç],£) :– G–>F. Dette og det at Gê$f$(R) gir oss ved hjelp av (+) at Fê$f$(R). Det følger fra dette at T(F;4(Ç), R')

Vi må så vise at R'|L;i = R|L;i (i=1,2). Dette skjer imidlertid på nøyaktig samme måte som under Tilfelle (iii). Vi konkluderer med at F;4(Ç) er konstruerbar.

Dette avslutter vårt bevis for Teorem 10.5. **Q.E.D.**

Det er lett å se at F;q/0/(ø) = Var (q=1,...,4) er konstruerbar og regulær. I følge Teorem 7.4 må man derfor ha at Craigs interpolasjonsteorem holder for J;0(F;q/0/(ø)) for q=1,..,4. I følge Lemma 10.3 har man at F;q/n/(ø) for alle n≥1 er en regulær systemkarakteristikk. I lys av Teorem 10.5 har man derfor:

**Teorem 10.6** Craigs interpolasjonsteorem gjelder for J;0(F;q/n/(ø)) for ethvert n der n≥0 og alle q der q=1,...,4.

I våre språk inngår bare den intensjonale operatoren T;<0,0>. I det følgende skriver vi "Nec(F)" istedenfor "T;<0,0>(F)".

Vi definerer for hvert n≥0 en logikk E;n ved å sette : E;0 = J;0(F;0/1/(ø)). E;(n+1) er så definert gitt E;n ved å stipulere at E;(n+1)-aksiomene i L, Ax(E;(n+1),L) er J;0-aksiomene i L samt alle formler av typen Nec(F) –> Nec(G) der F<–>G er et teorem i E;n. E;(n+1)-teoremene i L, er den minste formelmengden X i L som inneholder alle E;(n+1)-aksiomene i

L og som er lukket under modus ponens og universell generalisering.

Ved induksjon på n kan man bevise:

**Lemma 10.7** La LêJ. Da gjelder:

$$Th(E;n,L) = Th(J;0(F;1/n/(ø)), L) \text{ for } n\geq 0.$$

Vi lar E være logikken som er definert på den følgende måte. E-aksiomene i L er UN/n,0,∞/(Th(E;n,L)). E-teoremene i L er den minste mengden X Inkl Fml(L) der Ax(E,L) Inkl X og der X er lukket under modus ponens og universell generalisering. E-teoremene i L betegner vi med Th(E,L). Vi må åpenbart ha:
Th(E,L) = UN/n,0,∞/(Th(E;n,L)). Th(E,L) kan også spesifiseres som den minste mengden X Inkl Fml(L) er vi har Ax(J;0,L) inkl X og der X er lukket under modus ponens og universell generalisering samt slutningsreglen:

:– (F<–>G) –> :– Nec(F) <–> Nec(G).

Man gjenkjenner E som det systemet som kalles det minste klassiske modalsystemet.[29]

Vi definerer for hvert n≥0 en logikk H;n slik: Vi setter
H;0 = J;0(F;2/0/(ø)). Vi definerer så H;(n+1) gitt H;n slik: H;(n+1)-aksiomene i L, Ax(H;(n+1),L) er J;0-aksiomene i L samt alle formler av typen Nec(F) –> Nec(G) der F–>G er et teorem i H;n. H;(n+1)-teoremene i L, er den minste formelmengden X i L som inneholder alle H;(n+1)-aksiomene i L og som er lukket under modus ponens og universell generalisering.

Ved induksjon på n kan man bevise:

**Lemma 10.8** La LêJ. Da gjelder:

$$Th(H;n,L) = Th(J;0(F;2/n/(ø)), L) \text{ for } n\geq 0.$$

Vi lar H være logikken som er definert på den følgende måte. H-aksiomene i L er UN/n,0,∞/(Th(H;n,L)). H-teoremene i L er den minste mengden X Inkl Fml(L) der Ax(H,L) Inkl X og der X er lukket under modus ponens og universell generalisering. H-teoremene i L betegner vi med Th(H,L). Vi må åpenbart ha:
Th(H,L) = UN/n,0,∞/(Th(H;n,L)). Th(H,L) kan også spesifiseres som den minste mengden X Inkl Fml(L) er vi har Ax(J;0,L) inkl X og der X er lukket under modus ponens og universell generalisering samt slutningsreglen:

:– (F–>G) –> :– Nec(F) –> Nec(G).[30]

---

[29] Systemet vi har kalt E kan oppfattes som en kvantifikasjonsteoretisk utgave av systemet E behandlet i Segerberg [1]. Det omtales der som "det minste klassiske modalsystemet". Hans system E er en modal utsagnslogikk. I det nevte arbeid vises det at denne kalkylen er komplett og avgjørbar. Et annet fullstendighetbevis og avgjørbarhetsbevis foreligger i Cresswell [1]. Cresswell kaller systemet E for L og betrakter en uendelig sekvens av logikker L;n der L;n SInkl L;(n+1) SInkl L for alle n≥0. Han bruker dette til å vise at systemet L ikke er endelig aksiomatiserbart med modus ponens som eneste slutningsregel. Det er å bemerke at vår systemsekvens E;n svarer til Cresswells L;n om vi begrenser oss til utsagnslogikk. Fullstendighetsbevisene til Segerberg og Cresswell er basert på såkalt "neighbourhood"-semantikk. Et fullstendighetsbevis for E utvidet med kvantorer er gitt av Gabbay. (Se Gabbay [1]). Den såkalte "neighbourhood"-semantikk synes å stamme fra Scott og Montague. (Se Scott [1], Montague [2]).

[30] Systemet H er noe sterkere enn E oh H;n sterkere enn E;n for alle n≥0. Systemet H synes ikke å ha blitt studert før. Systemene C og K er kvantifikasjonsteoretiske versjoner av de velkjente modale setningslogikkene C og K. De har blitt inngående studert tidligere. Se Segerberg [1], Lemmon [1],[2] og Lemmon & Scott [1]. Såvidt jeg vet har imidlertid ingen studert sekvensene C;n (n≥0) og K;n (n≥0). Det er å bemerke at man lett kan vise at C;n SInkl C;(n+1) SInkl C for alle n≥0 og at
K;n SInkl K;(n+1) SInkl K for alle n≥0. I Gabbay [2] er Craigs interpolasjonsteorem vist for versjoner av C og K med kvantorer, men uten identitet, funksjonssymboler, beskrivelsesoperator og singulære termer i snever forstand. Systemene C;n og K;n for n≥0 er derimot ikke behandlet i hans artikkel og heller ikke noen av systemene H;n, E og H.

Fra Lemma 10.4 og Lemma 10.8 følger at Th(H;n,L) Inkl Th(H;(n+1),L) for alle n≥0.

Vi definerer for hvert n≥0 en logikk C;n slik: Vi setter C;0 = J;0(F;3/0/(ø)). Vi definerer så C;(n+1) gitt C;n slik: C;(n+1)-aksiomene i L, Ax(C;(n+1),L) er J;0-aksiomene i L samt alle formler av typen Nec(F) –> Nec(G) der F–>G er et teorem i C;n og alle formler av typen:

Nec(F –>G) –>(Nec(F) –> Nec(G))

C;(n+1)-teoremene i L, er den minste formelmengden X i L som inneholder alle C;(n+1)-aksiomene i L og som er lukket under modus ponens og universell generalisering.

Ved induksjon på n kan man bevise:

**Lemma 10.9** La LêJ. Da gjelder:

Th(C;n,L) = Th(J;0(F;3/n/(ø)), L) for n≥0.

Vi lar C være logikken som er definert på den følgende måte. C-aksiomene i L er UN/n,0,∞/(Th(C;n,L)). C-teoremene i L er den minste mengden X Inkl Fml(L) der Ax(C,L) Inkl X og der X er lukket under modus ponens og universell generalisering. C-teoremene i L betegner vi med Th(C,L). Vi må åpenbart ha:
Th(C,L) = UN/n,0,∞/(Th(C;n,L)). Th(C,L) kan også spesifiseres som den minste mengden X Inkl Fml(L) er vi har Ax(J;0,L) inkl X og dessuten alle formler av typen:

Nec(F –>G) –>(Nec(F) –> Nec(G)),

og der X er lukket under modus ponens og universell generalisering samt slutningsreglen:

:– (F–>G) –> :– Nec(F) –> Nec(G).

Vi har åpenbart at Th(C;n,L) Inkl Th(C;(n+1),L) for alle n≥0.

Vi definerer tilslutt for hvert n≥0 en logikk K;n slik: Vi setter K;0 = J;0(F;4/0/(ø)). Vi definerer så K;(n+1) gitt K;n slik: K;(n+1)-aksiomene i L, Ax(K;(n+1),L) er J;0-aksiomene i L samt alle formler av typen Nec(F) der F er et teorem i K;n. I tillegg kommer alle formler av typen:

Nec(F –>G) –>(Nec(F) –> Nec(G))

K;(n+1)-teoremene i L, er den minste formelmengden X i L som inneholder alle K;(n+1)-aksiomene i L og som er lukket under modus ponens og universell generalisering.

Ved induksjon på n kan man bevise:

**Lemma 10.10** La LêJ. Da gjelder:

Th(K;n,L) = Th(J;0(F;4/n/(ø)), L) for n≥0.

Vi lar K være logikken som er definert på den følgende måte: K-aksiomene i L, Ax(K,L), er UN/n,0,∞/(Th(K;n,L)). K-teoremene i L er den minste mengden X Inkl Fml(L) der Ax(K,L) Inkl X og der X er lukket under modus ponens og universell generalisering. K-teoremene i L betegner vi med Th(C,L). Vi må åpenbart ha: Th(K,L) = UN/n,0,∞/(Th(K;n,L)). Th(K,L) kan også spesifiseres som den minste mengden X Inkl Fml(L) er vi har Ax(J;0,L) inkl X og dessuten alle formler av typen:

Nec(F –>G) –>(Nec(F) –> Nec(G)),

og der X er lukket under modus ponens og universell generalisering samt slutningsreglen:

:– (F –> :– Nec(F).

Vi har åpenbart at Th(K;n,L) Inkl Th(K;(n+1),L) for alle n≥0.

Man gjenkjenner i systemene C og K henholdsvis den miste regulære modallogikken og den minste normale modallogikken.[31]

---

[31] I systemene K;n og K er den følgende formel utledbar: (1) (Ax)(Ay)(x=y –> Nec(x=y)). Dessuten kan

Fra Lemma 10.6 – Lemma 10.10 følger:

**Teorem 10.11** Craigs interpolasjonsteorem holder for E;n, H;n, C;n og K;n for alle n≥0.

Vi viser så tilslutt:

**Teorem 10.12** Craigs interpolasjonsteorem holder for E, H, C og K.

**Bevis:** La "S" være plassholder for enten "E", "H", "C" eller "K". La T, T' være to S-teorier der L er språket til T og L' er språket til T'. La L* være unionen av de to språkene dvs. språket som inneholder alle de ikke-logiske symbolene som er med i begge språk. Anta

(1) TU T' :– (F–>G) der FêFml(L) og GêFml(L').

I følge reduksjonsteoremet må det finnes formler D;1,...,D;qêFml(L) som er lukninger av ikke-logiske aksiomer i T og formler H;1,...,H;p êFml(L') som er lukninger av ikke-logiske aksiomer i T' slik at

S :– D;1&...&D;q & H;1&...&H;p –> (F–>G). (q,p≥0)

Fra dette følger:

S :– D;1&...&D;q &F. –> (H;1&...&H;p –>G)

Her er antesedenten en formel i L og konsekventen en formel i L'. Siden Th(S,L*) = UN/n,0,∞/(Th(S;n,L*)) følger det at det må finnes n≥0 slik at:

S;n :– D;1&...&D;q &F. –> (H;1&...&H;p –>G)

Siden Craigs interpolasjonsteorem holder for S;n i følge Teorem 10.11 må det finnes en interpolasjonsformel E slik at:

(S;n,L) :– D;1&...&D;q &F. –> E

(S;n,L') :– E. –> (H;1&...&H;p –>G)

Men da har man siden

Th(S,L) = UN/n,0,∞/(Th(S;n,L)) & Th(S,L') = UN/n,0,∞/(Th(S;n,L'))

---

man utlede (2) (Ax)(Ey)(Nec(x=y). Det virker som en rekke persoer finner disse formlene lite innlysende og nærmest uantagelige om "Nec" tolkes som "Det er logisk nødvendig at". Det samme synes å være tilfelle om "Nec" tolkes som "Det er kausalnødvendig at" eller "Det er obligatorisk at". Tolkes "Nec" som logisk nødvendighet uttrykker (2) tilsynelatende at enhver ting eksisterer med nødvendighet. Dette er ikke allminnelig akseptert. Lignende bemerkninger kan gjøres i forbindelse med systemene C og C;n. I disse systemene er riktignok hverken (1) eller (2) utledbare siden ingen formler avtypen Nec(F) er noe teorem i C;n eller C. Men man kan utlede:

(3) Nec(G) –> (x=y –> Nec(x=y)) og (4) Nec(G) –> (Ax)(Ey)(Nec(x=y)) som noen trolig vil oppfatte som urimelige. Det er imidlertid mulig å svekke disse systemene slik at ingen av formlene (1) – (4) blir utledbare. Dette kan gjøres på flere måter. Vi definerer C-;(n+1) som C;(n+1) bortsett fra at vi erstatter slutningsreglen C;n :– (F–>G) –> C;(n+1) :– Nec(F) –> Nec(G) med regelen

C-;n :– F;1&...&F;n –> G –> C-;;n+1 :– Nec(F;1)&...&ec(F;n) –> Nec(G) med det forbehold at enhver fri variabel som forekommer i G også må forekomme fri i en eller annen av F;1,...,F;n og at enhver konstant som forekommer i G må forekomme i en av F;1,...,F;n. I C-;n er det lett å vise at hverken (3) eller (4) er utledbare (n≥0). Man kan la C- være UN/nêN/(C–;n). Vi får systemet K–;n som er en svekket versjon av K;n ved å legge til Nec/m/(Ax)(x=x) for alle m der 0≤m≤n til C–;n som nye aksiomer. Man kan så la K– være UN/nêN/(K–;n). Hverken i C–;n, C–, K–;n eller K– er noen av formlene (1) – (4) utledbare. Det kan nå nevnes at vi ved hjelp av vårt hovedteorem kan bevise Craigs interpolasjonsteorem gjelder for alle kalkylene C–;n, C–, K–;n og K samt en del relaterte kalkyler. I forbindelse med (1) og (2) ovenfor kan det nevnes at man i Føllesdal[5] finner utformet en semantikk for kausallogikk der (1) og (2) ikke er gyldige. Jeg har modifisert denne semantikken, som i vesentlige henseende er basert på idéer fra Kripke og aksiomatisert en del av de systemer som kan defineres ved hjelp av den. Blandt et av de systemene som er blitt aksiomatisert er et som er identisk med K. Et annet system som jeg har vist et alternativt kompletthetsteorem for er systemet som resulterer når man legger aksiomskjemaet (5) Nec((Ax)(x≠x)) –> Nec(F) til K–. Craigs interpolasjonsteorem kan forøvrig bevises for alle systemene C–;n, K–;n,C–,K– når (5) legges til som nytt aksiomskjema. Detaljerte bevis vil ikke bli fremlagt her. Det er å håpe at mitt arbeid med Føllesdals systemer kan bli gjort tilgjengelig om ikke alt for lenge.

har man:

(S;n,L) :– D;1&...&D;q –>(F –> E)

(S;n,L') :– (H;1&...&H;p –>(E –>G)

Men fra dette følger åpenbart: T :– (F–>E) og T':– (E –>G). Craigs interpolasjons-teorem holder derfor også for S. **Q.E.D.**

## §11 Aksiomatisering av kalkylene introdusert i §10. Avsluttende bemerkninger.

Systemene E;n, H;n, C;n og K;n slik vi har spesifisert dem ovenfor er ikke aksiomatisert på noen rekursiv måte. Det er ikke effektivt avgjørbart slik vi har definert kalkylene hvorvidt noe er et aksiom eller ikke. Dette kommer av at det ikke er effektivt avgjørbart hvorvidt noe er et J;0-teorem eller ikke. Det er derfor av interesse å vise at disse systemene er rekursivt aksiomatiserbare og å spesifisere slike aksiomatiseringer. Vi skal derfor bevise:

**Teorem 11.1** E;n, H;n, C;n og K;n er rekursivt aksiomatiserbare for hvert n≥0

For å bevise dette trenger vi det følgende lemma:

**Lemma 11.2** Følgende gjelder for alle n≥0:

(i) (E;(n+1),L) :– Nec(F)<–>Nec(G) <–> (E;n,L) :– F <–> G

(ii) (H;(n+1),L) :– Nec(F)<–>Nec(G) <–> (H;n,L) :– F <–> G

(iii) (C;(n+1),L) :– Nec(F)<–>Nec(G) <–> (C;n,L) :– F <–> G

(iv) (K;(n+1),L) :– Nec(F) <–> ( K;n,L) :– F

Vi utelater beviset for denne satsen av plasshensyn.

Bevis for Teorem 11.1: (I) Vi ser først på systemene E;n (n≥0). Vi definerer induktivt operasjonen C;n, som til hvert naturlig tall m≥0 tilordner en formel i L, ved:

(i) C;0(F) = F

(ii) C;(m+1)(F) = Nec(F;0) <–> Nec(C;m(F))

Her står F;0 for formelen (Ax)(x=x). Vi betrakter så de følgende slutningsregler:

R1(m) :– C;m(G) –> :– C;m((Ax)G)

R2(m) :– C;m(F) & :– C;m(F–>G) –> :– C;m(G)

R3(m) :– C;m(G;1 <–> G;2) –> :– C;(m–1)(Nec(G;1) <–> Nec(G;2))

I forbindelse med R3(m) forutsettes det at m>0.

Ax(E;0,L) er mengden av alle J;0(Var)-aksiomene i L. Vi definerer induktivt en serie av systemer S;m (m≥0). Vi setter

(i) Ax(S;0,L) = Ax(E;0,L) og at

(ii) Ax(S;(m+1), L) = Mg(C;1(G): GêAx(S;m,L)) U Ax(S;m(L)).

Systemet S;m er systemet hvis aksiomer er Ax(S;m,L) og der slutningsreglene er R1(p), R2(p) for alle 0≤p≤m og R3(p) for alle p der 1≤p≤m. Som man ser har S;m, for hvert m≥0, bare endelig mange aksiomskjemaer og slutningsregler. Vi skal nå vise:

(A) S;m= E;m for alle m≥0

Dette gjøres ved induksjon på m. Det er klart den holder for m=0. Vi behøver derfor bare å bevise at den holder for m+1 om den holder for m. Anta (A) holder for m. Vi viser først at:

(B) (S;m) :– F –> S;(m+1) :– Nec(F;0) <–> Nec(F)
–> S;(m+1) :– C;1(F)

Vi har om FêAx(S;m,L) at C;1(F)êAx(S;(m+1),L) og derfor at
(Nec(F;0) <–> Nec(F))êAx(S;(m+1),L). Da følger

S;(m+1) :– (Nec(F;0) <–> Nec(F)) som er det vi ønsker.

Vi viser så at Mg(F: S;(m+1) :– C;1(F)) er lukket under alle slutningsreglene i S;m, dvs. lukket under R1(n), R2(n) og R3(n) for alle n< m+1 og n≥0.

(a) Anta n<(m+1) og at S;(m+1) :– Nec(F;0) <–> Nec(C;n(G)). Da har man S;(m+1) :– C;(n+1)(G). Siden R1(n+1) er en slutningsregel i S;(m+1) om n<(m+1) følger at S;(m+1) :– C;(n+1)((Ax)G) og da:

S;(m+1) :– Nec(F;0) <–> Nec(C;n((Ax)G))

(b) Anta n<m+1 og at S;(m+1) :– Nec(F;0) <–> Nec(C;n(G)) og dessuten at: S;(m+1) :– Nec(F;0) <–> Nec(C;n(G –> H)). Da har man

S;(m+1) :– C;(n+1)(G) og S;(m+1) :– C;(n+1)(G–>H). Siden R2(n+1) er en slutningsregel i S;(m+1) når n<m+1 må man ha S;(m+1) :– C;(n+1)(H) og derfor:

S;(m+1) :– Nec(F;0) <–> Nec(C;n(H))

(c) Anta 1≤n<m+1 og at S;(m+1) :– Nec(F;0) <–> Nec(C;n(G1<–>G;2)). Da har man S;(m+1) :– C;(n+1)(G1<–>G;2). Siden R3(n) er en slutningsregel i S;(m+1) når n<m+1 følger at S;(m+1) :– C;n(Nec(G1)<–>Nec(G;2)) dvs.

S;(m+1) :– Nec(F;0) <–>C;(n-1)(Nec(G1)<–> Nec(G;2)).

Punkt (a) – (b) viser at Mg(F: S;(m+1) :– C;1(F)) er lukket under slutningsreglene i S;m. dermed er (B) bevist.

Anta nå E;m :– (F<–>G). Etter induksjonshypotesen har man da S;m :– (F<–>G). I lys av (B) ovenfor følger: S;(m+1) :– Nec(F;0)<–>Nec(F<–>G) iden R;3(1) er en slutningsregel i S;(m+1) følger at S;(m+1) :– Nec(F) <–> Nec(G). Dette viser at ethvert E;(m+1)-aksiom er et teorem i S;(m+1). Siden S;(m+1) inneholder modus ponens og universell generalisering som slutningsregler følger:

(C) E;(m+1) Inkl S;(m+1)

Vi viser så at det omvendte holder:

(D) S;(m+1) Inkl E;(m+1)

Det er da nødvendig å vise at alle aksiomene og slutningsreglene i S;(m+1) er utledbare i E;(m+1).

(a) Anta FêAx(S;(m+1),L). Da har man enten at F= C;1(G) der GêAx(S;m,L) eller at FêAx(S;m,L). I det siste tilfellet har man etter induksjonshypotesen at E;m :– F og derfor at E;(m+1) :– F. I det første tilfellet har man F = (Nec(F;0) <–> Nec(G)) der GêAx(S;m,L). Siden GêA(S;m,L) har man ved hjelp av induksjonshypotesen at E;m :– G. Men da E;m :– (F;0 <–> G) og følgelig E;(m+1) :– (Nec(F;0) <–> Nec(G)) som er det vi ønsker.

(b) Vi viser R(1)(n) for 1≤n≤(m+1) er utledbar i E;(m+1): Anta E;(m+1) :– C;n(G). Da har man ( i lys av definisjonen av C;n) at

E;(m+1) :– Nec(F;0) <–> Nec(C;(n–1)(G))

Ved hjelp av Lemma 11.2 impliserer dette E;m :– F;0 <–> C;(n–1)(G). Man har derfor E;m :– C;(n–1)(G). Nå er R1(n–1) en slutningsregel i S;m og siden E;m = S;m etter induksjonshypotesen følger at R1(n-1) holder i E;m. Derfor E;m :– C;(n–1)((Ax)G). Men da har vi i følge Lemma 11.2 at

E;(m+1) :– Nec(F;0) <–> Nec(C;(n-1)((Ax)G)) og derfor E;(m+1) :– C;n((Ax)G).

(c) Vi viser at R2(n) er utledbar i E;(m+1) om 1≤n≤m+1. Det er klart at denne regelen holder i E;(m+1) om n=0. Anta

E;(m+1) :– C;n(G)

E;(m+1) :– C;n(G–>H)

Da har man:

E;(m+1) :– Nec(F;0) <–> Nec(C;(n–1)(G)) og dessuten:

E;(m+1) :– Nec(F;0) <–> Nec(C;(n–1)(G–>H))

Ved hjelp av Lemma 11.2 kan man herav slutte:

E;m :– F;0 <–> C;(n–1)(G) & E;m :– F;0 <–> C;(n–1)(G–>H) Det følger derfor: E;m :– C;(n–1)(G) & E;m :– C;(n–1)(G–>H). Siden E;m = S;m etter induksjonshypotesen har man at R2(n–1) må være en slutningsregel i S;m og derfor i E;m. Derfor E;m :– C;(n–1)(H) Men da E;m :– F;0 <–> C;(n–1)(H). Ved hjelp av Lemma 11.2 kan man da slutte E;(m+1) :– Nec(F;0) <–> Nec(C;(n–1)(H)). Dette innebærer E;(m+1) :– C;n(H).

(d) Ved hjelp av Lemma 11.2 ser man at man har:

(1) E;m :– C;n(F) <–> E;m :– Nec(F;0) <–> Nec(C;(n–1)(F))
<–> E;(m–1) :– F;0 <–> C;(n–1)(F)
<–> E;(m–1) :– C;(n–1)(F)

og derfor: (2) E;m :– C;n(F) <–> E;(m–n) :– F

Anta nå E;(m+1) :– C;n(G;1 <–> G;2). I lys av (2) har man

E;((m+1)–n) :– G;1<–> G;2. I lys av Lemma 11.2 holder dette hvis og bare hvis: E;(((m+1)–n)+1) :– Nec(G;1) <–> Nec(G;2). Men fra dette følger ved hjelp av (2): E;(m+1) :– C;(n–1)(Nec(G;1) <–> Nec(G;2))

Dette viser at R3(n) er utledbar i E;(m+1) når 1≤n≤(m+1). Dette avslutter vårt bevis for D. Det følger at S;m = E;m for alle m≥0 og derfor at E;m kan aksiomatiseres på en rekursiv måte, siden S;m er en rekursiv aksiomatisering av E;m.

(II) Vi ser på sekvensen av systemer <H;n>/nêN/. Vi definerer induktivt D;n(F) ved:

(i) D;0(F) = F

(ii) D;(m+1)(F) = (Nec(F;0) –> Nec(D;m(F))

Videre betrakter vi de følgende slutningsregler:

R1*(m) :– D;m(G) –> :– D;m((Ax)G)

R2*(m) :– D;m(F) & :– D;m(F–>G) –> :– D;m(G)

R3*(m) :– D;m(G;1 –> G;2) –> :– D;(m–1)(Nec(G;1) –> Nec(G;2))

I forbindelse med R3*(m) må det naturligvis forutsettes at m≥1.

Vi definerer:

Ax(P:0,L) = Ax(J;0(Var),L)

Ax(P;(m+1),L ) = Ax(P;m,L) U Mg(D;1(F) : FêAx(P;m,L))

Systemet P;m har som aksiomer Ax(P;m,L) og som slutningsregler R1*(m) og R2*(m) der m≥0 og R3*(m) der m≥1. Man kan nå vise:

(1) P;m = H;m for alle m≥0

Beviset er nøyaktig som under (I) bortsett fra at vi erstatter "C" over alt med "D", "S" med "P" og "E" med "H" og ellers foretar visse opplagte modifikasjoner som gir seg av definisjonen av D. P;m er en rekursiv aksiomatisering av H;m for alle m≥0.

(III) La oss nå se på sekvensen av systemer <C;n>/nêN/. Vi definerer et system Q;m for alle m≥0. Man setter Ax(Q;0,L) = Ax(J;0(Var),L). Ax(Q;(m+1),L) er Ax(Q;m,L) U Mg(D;1(F) : FêAx(Q;m,L)) pluss alle formler av typen:

Nec(F–>G) –> (Nec(F) –> Nec(G)) i L

Systemet Q;m er så systemet der aksiomene er Ax(Q;m,L) og hvor slutningsreglene er R1*(n) og R2*(n) om 0≤n≤m og R3*(n) om 1≤n≤m. Ved å bruke bevismetoden demonstrert under (I) er det forholdsvis lett å vise at:

Q;m = C;m for alle m≥0.

Siden Q;m er en rekursiv aksiomatisering følger det at C;m er et rekursivt aksiomatiserbart system.

(IV) La os tilslutt se på systemsekvensen <K;n>/nêN/. Vi definerer for hvert n≥0 et system Q+;n. Vi lar Ax(Q+;0,L) være Ax(Q,0,L) slik denne mengden er definert i avsnittet rett ovenfor. Vi lar Ax(Q+;(n+1),L) være Ax(Q;(n+1),L) pluss alle formler av typen Nec/m/(F;0)

der $0 \leq m \leq n+1$. Vi gjør oppmerksom på at Nec/n/(G) er induktivt definert slik:

(i) Nec/0/(G) = G

(ii) Nec/j+1/(G) = Nec(Nec/j/(G))

Q+;m er så systemet hvis aksiomer er Ax(Q+;m,L) og hvor slutningsreglene er R1*(j) og R2*(j) om $0 \leq j \leq m$, samt R3*(j) om $1 \leq j \leq m$. Man kan nå vise at

Q+;m = K;m for alle $m \geq 0$.

Dette skjer omtrent på samme måte som under (III). Det skulle imidlertid neppe være nødvendig å gå igjennom alle detaljene. Siden Q+;m bare har endelig mange aksiomskjemaer og slutningsregler for hver $m \geq 0$ og det videre er slik at man åpenbart kan avgjøre om en formel er et aksiom eller ikke og det dessuten effektivt kan avgjøres om en formelsekvens er et bevis i systemet eller ikke representerer Q+;m en rekursiv aksiomatisering av K;m.

Dette avslutter beviset for Teorem 11.1. **Q.E.D.**

La oss nå gi en kort oversikt over det som har blitt gjort i dette kapitlet.

Hovedresultatene er som antydet Teorem 8.3 og Teorem 8.5 i §8 som angir nødvendige og tilstrekkelige betingelser for at Craigs interpolasjonsteorem og Joint-Consistency-teoremet skal gjelde for logikken J;0(Ç) der Ç er en ekspanderbar sytemkarakteristikk og Var Inkl Ç. Dette er det mest generelle resultatet vi har vært i stand til å finne.

Teorem 9.1 i §9 som sier at dersom Ç Inkl In(J) og Ç er regulær så er Ç ekspanderbar er også viktig. Ved å anvende dette teoremet beviset vi Teorem 10.5. Vi måtte også selvfølgelig benytte oss av våre hovedresultater. Ved hjelp av Teorem 10.5 kunne vi så vise at Craigs interpolasjosteorem holdt for logikkene E, H, C, K og E;n, H;n, C;n og K;n for alle $n \geq 0$. Det må nå bemerkes at dette bare er en liten del av kalkylene man kan bruke hovedteoremet til å vise craigs interpolasjonsteorem for. Vi valgte ut disse fordi det var mulig å gi en noenlunde enkel rekursiv aksiomatisering av dem og fordi de tidligere har blitt nevnt i litteraturen. Merk imidlertid at siden F;q/0/ er en regulær systemkarakteristikk følger det fra Teorem 10.5 at Craigs interpolasjonsteorem gjelder for enhver logikk av typen J;0(F; (q;1)/m;1/(..... F;(q;j)/m;j/(ø).....)) der $m;1,...,m;j \hat{e} N$ og $q;1,...,q;j \hat{e} \{1,..,4\}$. Det er mulig at alle disse logikkene er rekursivt aksiomatiserbare.

Ved hjelp av metodene i dette kapitlet kan man også bevise Craigs interpolasjonsteorem for kalkylene som fremkommer ved å legge til et av skjemaene Nec(F) –> F og Nec(F) –>¬Nec(¬F) til kalkylene E;n, H;n, C;n, K;n og E, H, C og K. Dette gir en da interpolasjonsresultater for blandt annet
von Wright - Gødel systemet T, den kjente deontiske logikken D og dessuten en rekke beslektede kalkyler. Vi har imidlertid begrenset oss til kalkylene ovenfor av plasshensyn. Det er imidlertid å håpe at en mer systematisk og uttømmende oversikt over anvendelsesmulighetene til de hovedsatsene som har blitt fremstilt kan bli resultatet av fremtidige undersøkelser.

# Kapittel IX

Avslutning

## §1 Avsluttende bemerkninger.

Vi skal gjøre et forsøk på å oppsummere de viktigste punktene i denne avhandlingen.

Vårt hovedanliggende har vært intensjonale språk slik de ble definert i Kapittel I. Det kan forekomme en helt nødvendig å ta i betraktning slike språk om man vil komme til klarhet over en rekke sentrale filosofiske problemer som er forbundet med begreper som nødvendighet, mulighet, kausalnødvendighet og "counterfactuals". Videre kan man nevne begreper som har tilknytning til viten og tro, tenkning iaktagelse, følelser, viljesbeslutninger og handling. I forbindelse med de sistnevnte begrepene er nøkkeluttrykkene nettopp det som har har blitt kalt "propositional attitude"-operatorer dvs. slike uttrykk som " x vet – ", "x tror at –", "x er opphisset over at –", "x er engstelig over at –", "x er forundret over at –", osv. Vi har ikke i dette arbeidet forsøkt å analysere disse uttrykkene videre, f.eks. forsøkt å definere dem ved hjelp av rent ekstensjonale konstruksjoner, men har i stedet innført dem som primitive operatorer. Videre har det ikke vært vårt mål å gi detaljerte kriterier for når en person a f.eks. oppfyller en betingelse av typen "x vet at –" i rent behavioristiske eller fysikalistiske termer eller i det hele tatt undersøke om dette er mulig. Vi har begrenset oss til å studere rent logiske aspekter ved de intensjonale operatorene fra en meget generell synsvinkel. Før noe reduksjonistisk program for intensjonale språk kan gjennomføres med noen som helst suksess synes det nødvendig at man, i den utstrekning det er mulig, blir klar over de logiske særegenhetene ved de intensjonale språkene og klargjør så langt man kan de intuisjonene man har om de intensjonale uttrykksmåter. Sentralt i denne forbindelse vil være forsøket på å lage et mer presist kriterium for når en formel i et intensjonalt språk L er gyldig, videre å nå frem til en presis definisjon av logisk sannhet og logisk konsekvens for L. Det er vanskelig å se hvordan man kan ha noen god forståelse av de intensjonale operatorene om man ikke ser forholdsvis klart i hvilken retning løsningen er å finne på dette problemet.

I intensjonale kontekster synes de vanlige logiske prinsipper som eksistensiell generalisering, universell instansiering og Leibniz lov for identitet å bryte sammen. Man må derfor forsøke å finne ut hvordan disse lovene må modifiseres i intensjonale kontekster. Også her virker det berettiget å hevde at man mangler virkelig innsikt om man ikke kan si hvordan de nevnte lover kan modifiseres, hvilke muligheter som står åpne og hvilke sammenhenger det er mellom de forskjellige mulighetene. Man kan se i dette problem et spesialtilfelle av det mer omfattende problem om logisk sannhet og konsekvens for intensjonale språk.

Det har vært hensikten med dette arbeidet å kaste lys over disse problemene. Det er selvfølgelig som et bidrag til spørsmålet om logisk sannhet for intensjonale språk at vi har formulert teorien om I;0-modeller og J;0-modeller. Det er klart at intet definitivt er sagt i og med dette, men det forekommer oss som om den semantiske rammen vi har beskrevet er fruktbar og at problemene fremstår på en klarere måte innenfor denne, i det minste i den utstrekning man har i tankene "propositional attitude"-operatorene.
I denne forbindelse anser vi våre generelle kompletthetsteoremer og særlig metoden med å innføre "spesielle predikater" som vårt viktigste bidrag. Viktig er det også at vi har vist hvordan bestemte beskrivelser, singulære termer i snever forstand samt funksjonssymboler kan behandles i intensjonal logikk. Angående de "spesielle predikatene" tror jeg det bare er ved hjelp av disse – som er sanne om et individ x hvis og bare hvis de "intensjonale feltene" til individet har bestemte egenskaper – at man virkelig kan sies å nærmet seg, og kan sies å se klarere på, spørsmålet om hva det vil si at slike uttrykk som "x vet – ", "x tror at –" etc. har en logikk.

Det synes vanskelig å behandle slike begreper som tro, viten etc. uten å ta stilling til hva det er for slags størrelser det er man tror, vet er tilfelle, ser er tilfelle etc. Spørsmålet kan stilles om det er "propositions" eller en annen type entiteter. Igjen er det her et spørsmål om

forståelse og innsikt i sammenhenger. Vi bruker slike uttrykksmåter som " a forstår noe b ikke forstår", " a vet at så og så er tilfelle, men dette er noe som fortoner seg umulig for b", "Nesten alt det a vet er noe som virker umulig på b", etc. Det mest nærliggende når man ser slike forekomster av "vet", "forstår", "fortoner seg umulig", og en lang rekke lignende uttrykk, er å se på disse uttrykkene som relasjonsuttrykk som kan brukes til å uttrykke at et individ har en viss relasjon til noe. I andre sammenhenger kan det imidlertid være mer naturlig å se på f.eks. "vet" som en irredusibel del av en intensjonal operator "x vet at –". Spørsmålet oppstår derfor om hvordan sammenhengen er, og om hva slags ting det er man kan se, tro, vite er tilfelle, som er nødvendige, mulige etc. I;0-semantikken gir en type teori i denne forbindelse om G(R) kreves å være en-entydig i enhver I;0-modell R. De "tingene" man tror, vet, ser etc. kan sies å være en art intensjoner, "ultraintensjoner", som er av en noe annen art en det som vanligvis har blitt kalt for "propositions". Vi har innført denne semantikken, ikke så meget av den grunn at vi ønsker å insistere på eksistensen av "ultraintensjoner", men fordi den kaster lys over J;0-semantikken. Dessuten virker det som om så fint individuerte størrelser som ultraintensjoner trengs om vi tar problemet med begrenset substitusjon av logiske ekvivalenter i intensjonale kontekster alvorlig. Som vi imidlertid har påpekt i Kapittel IV er det en del uløste problemer i forbindelse med I;0-semantikken. Det virker som om man kunne vinne adskillig innsikt om disse problemene ble løst.

Hovedproblemet i det foreliggende arbeid har vært problemet med begrenset substitusjon av logiske ekvivalenter i intensjonale kontekster. Det virker som om det er absolutt nødvendig å ta dette problemet alvorlig i forbindelse med de såkalte "propositional attitudes". I lengden kan det ikke skyves til side ved å reintepretere begreper som "gyldighet" og gjøre idealiserende antagelser om "logisk allvitenhet". Det forekommer meg nokså klart at "mulig verden"-semantikken slik den har blitt utformet f.eks. av Hintikka, Kripke, Scott, Montague og andre, ikke er den rette til å kaste virkelig lys over dette problemet. Vi har følgelig ikke innført mulige verdener for å kunne tolke intensjonale operatorer. Når Kripke-modeller ikke er blitt omtalt i dette arbeidet skyldes det delvis dette, men også det faktum at vi ennå ikke har sett noen klare sammenhenger mellom denne typen av modeller og den typen som har blitt introdusert her. Det er å håpe at ytterligere undersøkelser kan kaste mer lys over dette. I mellomtiden kan man notere at det er mulige å tolke f.eks. de logiske modalitetene på en naturlig måte uten å måtte trekke inn en mulige verdener. Som bekjent er det noen som oppfatter mulige verdener som svært obskure og tvilsomme entiteter. Også dette aspektet ved de semantiske teoriene som har blitt presentert her, nemlig at de er fri for enhver referanse til mulige verdener er viktig og fortjener oppmerksomhet.

# Referanser

## Referanser


| | |
|---|---|
| Craig [1] | Craig, William. "Linear reasoning". *Journal of Symbolic Logic* 22 (1957) 250–268 |
| Cresswell [1] | Cresswell, M.J. "Classical Intensional Logics". *Theoria* 36 (1970) 347–372 |
| Cresswell [1] | Cresswell, M.J. "Intensional Logics and Logical truth". *Journal of Philosophical Logic* 1 (1972), 2–15 |
| Gabbay [1] | Gabbay, Dov M. "Montague-type sematics for non-classical logics". U.S. Air Force Office of Scientific Research contract no. F 61052-68-C-0036, Scientific Report no.4, October 1969. |
| Gabbay [2] | Gabbay, Dov M. "Craigs interpolation theorem for modal logics". In *Conference in Mathematical Logic '70* Lecture Notes in Mathematics. Berlin, New York, Heidelberg: Springer Verlag, 1970 |
| Gabbay [3] | Gabbay, Dov M. "Semantic proof of Craig's interpolation theorem for intuitionistic logic and extensions". In *Logic Colloquium 69* (edited by R.O. Gandy and C.M.E. Yates. Amsterdam: 1971 |
| Føllesdal [1] | Føllesdal, Dagfinn. "Referential Opacity and Modal Logic", *Filosofiske problemer nr. XXXII* (edited by Arne Næss) Oslo: Universitetsforlaget, 1966 |
| Føllesdal [2] | Føllesdal, Dagfinn. "Quine on Modality", *Synthese* 19 (1968-69), 147–157. |
| Føllesdal [3] | Føllesdal, Dagfinn. "Intepretation of Quantifiers", In *Logic, Methodology and Philosophy of Science III* (edited by B. van Rootselaar and J.F. Staal), pp. 271–281. Amsterdam: 1968 |
| Føllesdal [4] | Føllesdal, Dagfinn. "Quantification into causal contexts", in*Boston Studies in the Philosophy of Science Vol II.* pp 263–274. New York: Humanities Press, 1965 |
| Føllesdal [5] | Føllesdal, Dagfinn. "A model theoretic approach to causal logic", *Det kgl.norske videnskapers selskaps skrifter* 1966 nr. 2. Trondheim: I kommisjon hos F. Bruns Bokhandel. |
| Føllesdal [6] | Føllesdal, Dagfinn. "Knowledge, Identity and Existence", *Theoria* 33 (1967). 1–27. |
| Henkin [1] | Henkin, Leon. "The Completeness of the First Order Functional Calculus". *Journal of symbolic logic* 14 (1949), 159–66. |
| Hilpinen [1] | Hilpinen, Risto. "Knowing that one knows and the classical definition of knowledge". *Synthese* 21 (1970), 199–32. |
| Hintikka [1] | Hintikka, Jaakko. *Models for Modalities* . Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1969. |
| Hintikka [2] | Hintikka, Jaakko. *Knowledge and Belief.* Ithaca: Cornell University Press, 1962. |
| Hintikka [3] | Hintikka, Jaakko. "Modality and Quantification". *Theoria* 27 (1961), 119–128. |
| Hintikka [4] | Hintikka, Jaakko. "The Modes of Modality". *Acta Philosophica* |

*Fennica* 16 (1963), 65–82.

Hintikka [5] Hintikka, Jaakko. ""Kowing that one knows" re-viewed". *Synthese* 21 (1970), 141–162.

Hintikka [6] Hintikka, Jaakko. "Existence and Identity in epistemic contexts: A comment on Føllesdal's paper". *Theoria* 33 (1967), 138–148.

Hintikka [7] Hintikka, Jaakko. *Quantifiers in Deontic Logic.* Societas Scientiarum Fennica, Commentationes Humanarum, Litterarum XXXIII: 4. Helsinki: 1957

Hintikka [8] Hintikka, Jaakko. "Individuals, Possible Worlds, and Epistemic Logic". *Noûs* 1 (1967), 33–62.

Kanger [1] Kanger, Stig. "The morning star paradox". *Theoria* 23 (1957), 1–11.

Kripke [1] Kripke, Saul A. "A Completeness Theorem i Modal Logic". *Journal of symbolic logic* 24 (1959), 1–15.

Kripke [2] Kripke, Saul A. "Semantical analysis of modal logic I. Normal modal propositional calculi". *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik* 9 (1963), 67–96.

Kripke [3] Kripke, Saul A. "Semantical analysis of modal logic II. Non-normal modal propositional calculi". In *The Theory of Models* (Edited by Addison, Henkin and Tarski), pp 206–220. Amsterdam, 1965

Kripke [4] Kripke, Saul A. "Semantical analysis of intuitionistic logic I". In *Formal systems and recursive functions* (Edited by Crossley and Dummet), pp 92–130. Amsterdam, 1965

Kripke [5] Kripke, Saul A. "Semantical considerations on modal logic". *Acta Philosophica Fennica* 16 (1963) 83–94

Lemmon [1] Lemmon, E. J. "Algebraic semantics for modal logics I". *Journal of symbolic logic* 31 (1966), 46–65.

Lemmon [2] Lemmon, E. J. "Algebraic semantics for modal logics II". *Journal of symbolic logic* 31 (1966), 191–218.

Lemmon & Scott [1] Lemmon, E. J. (in collaboration with Dana Scott) *The 'Lemmon notes': an introduction to modal logic* (edited by Krister Segerberg) *American philosophical quarterly* Monograph Series (edited by Nicholas Rescher), no. 11. Oxford: Basil Blackwell, 1977.

Montague [1] Montague, Richard. "Logical Necessity, Physical Necessity, Ethics and Quantifiers". *Inquiry* 4 (1960), 259–269

Montague [2] Montague, Richard. "Pragmatics and Intensional Logic". *Synthese* 22 (1970), 68–94.

Montague [3] Montague, Richard. "Universal Grammar". *Theoria* 36 (1970), 373–398.

Quine [1] Quine, Willard van Orman. *Mathematical Logic.* Cambridge, Mass. : Harvard University Press, 1951.

Quine [2] Quine, Willard van Orman. *From a Logical Point of Wiew.* Cambridge, Mass. : Harvard University Press 2d ed., 1961.

Quine [3] Quine, Willard van Orman. "Three grades of modal involvement". *Proceedings of XI'th International Congress of Philosophy* (Brussels, 1953), vol. 14 , 65–81.

Quine [4] Quine, Willard van Orman. "Quantifiers and propositional attitudes". *Journal of Philosophy* 53 (1956), 177–187.

| | |
|---|---|
| Quine [5] | Quine, Willard van Orman. *Word and Object* Cambridge, Mass. : M.I.T. Press, 1960. |
| Scott [1] | Scott, Dana. "Advice on Modal Logic". In *Philosophical Problems in Logic Recent Developments* (edited by Karel Lambert), pp. 143 –173, Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1974. |
| Segerberg [1] | Segerberg, Krister. *An essay in classical modal logic*. 3 vols. Uppsala: University of Uppsala, 1971. |
| Shoenfield [1] | Shoenfield, Joseph. *Mathematical Logic.* London: Addison-Wesley, 1967. |
| Tarski [1] | Tarski, Alfred. "The Concept of Truth in Formalized Languages" in *Logic, Semantics, Metamathematics: Papers from 1923 to 1938* (translated by J.H. Woodger) Oxford: Clarendon Press, 1956. |